

## مروری جامع بر روش‌های کاهش نویز تصاویر دیجیتال در حوزه تبدیل با استفاده از مدل‌های آماری و مقایسه آنها

منصوره صعید زرنندی، حسین نظام آبادی پور، سعید سریزدی و احد جمالیزاده

### چکیده

کاهش نویز تصاویر در حوزه پردازش تصویر موضوعی است که بسیار مورد تحقیق و پژوهش قرار گرفته است. به طور کلی ایده های کاهش نویز را از لحاظ حوزه نمایش می توان به کاهش نویز در حوزه مکان و کاهش نویز در حوزه تبدیل تقسیم بندی نمود. روش های حوزه تبدیل را می توان با توجه به توابع پایه آنها به دو گروه اصلی روش های حوزه تبدیل با توابع پایه منطبق با داده و روش های حوزه تبدیل با توابع پایه ثابت تقسیم بندی کرد. روش های حوزه تبدیل با پایه ثابت که تبدیل موجک از مشهورترین آنها می باشد به دلیل ویژگی ها و خواصی که دارند مانند تفکیک فرکانس/مکانی مناسب به طور وسیعی برای کاربردهای کاهش نویز مورد استفاده قرار گرفته اند. همچنین به دلیل خاصیت غیرایستا بودن تصاویر طبیعی و نیز اضافه شدن نویز به آنها، در میان روش های حوزه تبدیل، روشهای آماری مورد توجه فراوان قرار گرفته اند. در این مقاله پس از معرفی کلی انواع روش های رفع نویز، مهمترین مدل های آماری ارائه شده در حوزه تبدیل با پایه ثابت، معرفی شده اند. نتایج تجربی جهت بیان مزایا و معایب این روش ها بحث و تحلیل شده اند. مطالعه مفهومی این مقاله می تواند مرجع مناسبی برای ایده های تحقیقی ارائه شده در حوزه کاهش نویز تصاویر باشد.

### کلید واژه ها

پردازش تصویر، کاهش نویز، مدل های آماری، حوزه تبدیل

حذف نویز، فرایند بازسازی تصاویر دیجیتال از طریق کاهش نویز ناخواسته از تصویر نویزی است در حالی که بسیاری از ساختارها و جزئیات تصویر تا حد امکان حفظ شود. چالش اساسی در این حوزه، طراحی الگوریتم هایی است که بین این دو مصالحه ایجاد کنند. در سیستم های عکسبرداری منابع نویز مختلفی مانند نویز فوتونی<sup>۱</sup>، نویز گرمایی<sup>۲</sup> و نویز چندی سازی<sup>۳</sup> وجود دارد. نویز گرمایی، ناشی از مدارات آنالوگ است که توزیعی گاوسی با میانگین صفر دارد و از آنجایی که نویز گاوسی در اغلب تصاویر وجود دارد به عنوان مدل نویز در این مقاله در نظر گرفته شده است. در این مقاله مدل ساختار زیر را برای تصویر در نظر می گیریم:

$$y = x + n, \quad x \in X, \quad (1)$$

### ۱ مقدمه

کاهش نویز تصاویر یک موضوع تحقیقاتی مهم است که پایه بسیاری از کاربردها مانند تشخیص اشیا، سرگرمی های دیجیتال و حسگری تصویر از راه دور می باشد. زمانی که تعداد سنسورها در دوربین ها افزایش پیدا می کند به نویز حساس تر می شوند. روش های کاهش نویز یک مرحله مهم برای بهبود کیفیت نهایی تصاویر هستند [۱-۷].

این مقاله در آذرماه ۹۸ دریافت، در اردیبهشت ماه سال ۹۹ بازنگری و در تیرماه همان سال پذیرفته شد.

<sup>۱</sup> آزمایشگاه پردازش داده هوشمند، بخش مهندسی برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان

رایانامه: [m\\_saeedzarandi@eng.uk.ac.ir](mailto:m_saeedzarandi@eng.uk.ac.ir)

[nezam, saryazdi}@uk.ac.ir](mailto:{nezam, saryazdi}@uk.ac.ir)

<sup>۲</sup> بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

رایانامه: [a.jamalizadeh@uk.ac.ir](mailto:a.jamalizadeh@uk.ac.ir)

نویسنده مسئول: منصوره صعید زرنندی

<sup>1</sup> Photon noise

<sup>2</sup> Thermal noise

<sup>3</sup> Quantization noise

هستند. با اعمال فیلترینگ مناسب، تصویر بازسازی شده، نویز کمتری خواهد داشت. روش های حوزه تبدیل با توابع پایه ثابت که از این پس به اختصار روش های حوزه تبدیل نامیده می شوند برای دهه های متوالی در حوزه کاهش نویز مورد بررسی قرار گرفته اند [۴۱، ۴۲]. تعداد زیادی از تبدیل ها مانند کسینوسی گسسته<sup>۸</sup> [۴۱]، موجک<sup>۹</sup> [۴۱]، پیچک<sup>۱۰</sup> [۴۳-۴۵]، مرزک<sup>۱۱</sup> [۴۶، ۴۷]، گوک<sup>۱۲</sup> [۴۸]، نوارک<sup>۱۳</sup> [۴۹-۵۱] و هرم جهت دار<sup>۱۴</sup> [۵۲] در این حوزه به طور گسترده ای مورد استفاده قرار گرفته اند. تبدیل موجک [۵۳، ۵۴] که از مشهورترین این تبدیل ها می باشد به دلیل ویژگی های متعدد، تاثیر بسیار زیادی در مسائل کاهش نویز داشته است [۵۵].

روش رفع نویز در حوزه تبدیل به طور کلی شامل سه مرحله می باشد:

- تجزیه تصویر به زیرباندها در سطوح و جهت های مختلف
- رفع نویز در همه زیر باندها به جز زیرباند فرکانس پایین
- اعمال عکس عمل تبدیل و به دست آوردن تصویر رفع نویز شده

از جمله روش های رفع نویز در حوزه تبدیل، روش های آستانه گذاری، روش های مبتنی بر رایانش نرم<sup>۱۵</sup> و روش های مبتنی بر مدل های آماری می باشند که به تفصیل در زیر بخش های بعد مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت.

## ۱-۱ روش آستانه گذاری

طبق خاصیت فشرده سازی، عمده انرژی در چند ضرایب از ضرایب موجک متمرکز بوده و بقیه ضرایب یا صفر هستند یا دارای مقادیر جزئی می باشند. این در حالی است که نویز بین تمام ضرایب گسترده می شود. پس می توان ضرایب کوچک را بدون تاثیر قابل توجه بر خصوصیات اصلی تصویر حذف نمود این روش به آستانه گذاری موسوم است.

روش های ابتدایی آستانه گذاری به صورت نرم و سخت می باشند. در روش آستانه گذاری سخت، ضریب موجک با سطح آستانه مقایسه می شود. در صورتی که ضریب از سطح آستانه کوچکتر باشد برابر صفر قرار داده می شود و در غیر این صورت ضریب تغییر نمی کند. در روش آستانه گذاری نرم، مقدار آستانه از تمام ضرایب بزرگتر از آستانه کم می شود و ضرایب کوچکتر از

که  $X$  مختصات مکانی دو بعدی پیکسل ها در تصویر را نشان می دهد،  $x$  تصویر اصلی است،  $n$  نویز جمع شونده مستقل از تصویر و دارای توزیع گاوسی با میانگین صفر و انحراف معیار  $\sigma_n$  است و  $y$  هم تصویر نویزی می باشد.

به طور کلی، روش های رفع نویز را می توان به روشهای حوزه مکان و حوزه تبدیل تقسیم بندی نمود [۸]. روش های رفع نویز در حوزه مکان شامل فیلترهای محلی و غیر محلی می باشند که از شباهت پیکسل ها (یا بلوک ها) در تصویر استفاده می کنند. الگوریتم های فیلترینگ محلی که برای کاهش نویز طراحی شده اند می توان فیلتر گاوسی [۹]، فیلتر وینر [۱۰]، فیلتر حداقل میانگین مربعات [۱۱]، فیلتر آموزش دیده<sup>۱</sup> [۱۲]، فیلتر دوجانبه<sup>۲</sup> [۱۳-۱۵] و فیلترینگ ناهمسانگرد<sup>۳</sup> [۱۶-۱۸] را نام برد. الگوریتم های مبتنی بر فیلترینگ محلی، پیچیدگی کمی دارند اما وقتی سطح نویز افزایش پیدا کند، به دلیل اینکه همبستگی میان پیکسل های مجاور، تحت تاثیر نویز شدید قرار می گیرند، این روش ها خوب عمل نمی کنند. از سوی دیگر، روش های غیر محلی که از میانگین وزن دهی شده پیکسل ها (یا بلوک ها) در کل تصویر استفاده می کنند در سطوح نویزی بالا، کارایی بهتری دارند [۱۹-۳۳]. عیب اصلی روش های فیلترینگ مکانی غیر محلی، این است که باعث هموارسازی زیاد<sup>۴</sup> تصویر می شوند [۱].

روش های حوزه تبدیل را می توان با توجه به توابع پایه آنها به دو گروه اصلی روش های حوزه تبدیل با توابع پایه منطبق با داده<sup>۵</sup> و روش های حوزه تبدیل با توابع پایه ثابت تقسیم بندی نمود. از جمله روش های حوزه تبدیل با توابع پایه منطبق با داده، روش های یادگیری ماشین، می باشند [۳۴-۳۶]. ایده کلی روش های مبتنی بر یادگیری این است که رفع نویز را با یادگیری گروه بزرگی از بلوک های تصویر انجام می دهند به گونه ای که هر بلوک در تصویر تخمین زده شده، به صورت یک ترکیب خطی از تعداد کمی از بلوک ها از دیکشنری افزونه ساخته شده بیان می شود. از روش های مبتنی بر یادگیری ماشین می توان روش های K-SVD [۳۷]، LSSC [۳۸] و نمایش تنک مبتنی بر خوشه بندی<sup>۷</sup> [۳۹] را نام برد. روش های مبتنی بر یادگیری ماشین اگرچه کارایی خوبی دارند، اما پیچیدگی این روش ها نیز زیاد می باشد [۴۰]. در روش های حوزه تبدیل با توابع پایه ثابت، تصاویر به وسیله مجموعه ای از ضرایب نشان داده می شوند. ضرایب کوچک، بخش فرکانس بالای تصویر هستند که مرتبط با جزئیات تصویر و نویز می باشند و ضرایب بزرگ، اطلاعات مهم یا فرکانس های پایین تصویر

<sup>8</sup> Discrete Cosine Transform

<sup>9</sup> Wavelet

<sup>10</sup> Curvelet

<sup>11</sup> Contourlet

<sup>12</sup> Wedgelet

<sup>13</sup> Bandlet

<sup>14</sup> Steerable Pyramid

<sup>15</sup> Soft computing

<sup>1</sup> Trained filter

<sup>2</sup> Bilateral

<sup>3</sup> Anisotropic

<sup>4</sup> Over smoothing

<sup>5</sup> Basis function

<sup>6</sup> Data adaptive

<sup>7</sup> Clustering-based sparse representation

مختلف معرفی و مقایسه شده اند و نهایتاً در بخش چهارم جمع بندی و نیز تعیین مسیر آینده آمده است.

## ۲ فرایند کاهش نویز مبتنی بر مدل های آماری در

### حوزه تبدیل

شکل ۱ فرایند کاهش نویز در روش های مبتنی بر مدل های آماری را به تصویر می کشد. در فرایند کاهش نویز، ابتدا یک تبدیل چند مقیاسی به تصویر اعمال می شود. در زیر بخش بعد حوزه های تبدیل که در فرایند رفع نویز آماری اغلب مورد استفاده قرار گرفته اند معرفی شده اند.

### ۲-۱ انواع تبدیل ها

از آنجایی که اکثر اطلاعات مهم تصویر، اطلاعات فرکانس پایین هستند در روش های پردازش سیگنال کلاسیک، برای کاهش نویز از حوزه تبدیل فوریه و فیلترهای پایین گذر استفاده شده است. اما در این روش ها بسیاری از ویژگی های فرکانس بالای مفید مانند لبه ها نیز حذف می شد که باعث تار شدن لبه ها یا ایجاد خرابی در تصاویر بازسازی شده می شود. همچنین از اشکالات تبدیل فوریه این است که هنگام تبدیل سیگنال به طیف فرکانسی، اطلاعات زمان/مکان را از دست می دهیم. تلاش و کوشش جهت رفع این مشکل منجر به ایجاد تحلیل جدیدی به نام تبدیل فوریه زمان کوتاه<sup>۱</sup> شد که تحلیل فوریه را در بخش کوچکی از زمان/مکان برای سیگنال انجام می دهد [۶۴]. در واقع این تبدیل، مصالحه ای بین زمان/مکان و فرکانس بوده و بسیار مفید واقع شد، اما دارای یک اشکال است و آن اینکه پنجره زمان/مکان آن برای همه فرکانس ها یکسان است در حالی که در تحلیل سیگنال ها نیاز به انعطاف پذیری بیشتری می باشد.

تبدیل موجک با استفاده از تکنیک پنجره زمان/مکان با اندازه متغیر به ما این امکان را می دهد که از یک بازه زمانی بزرگ برای به دست آوردن اطلاعات با فرکانس پایین و از یک ناحیه زمانی کوچک جهت دسترسی به اطلاعات با فرکانس بالا استفاده شود. در واقع با تبدیل موجک امکان مشخص کردن زمان/مکان تکینی<sup>۲</sup> ها وجود دارد [۶۵]. تبدیل موجک به دلیل خواصی که دارد ابزاری قوی جهت پردازش تصاویر می باشد.

با اینکه تبدیل موجک ابزاری قوی برای کاربردهایی مانند فشرده سازی تصاویر بود اما تبدیل بهینه ای برای کاربردهایی که نیاز به برگرداندن تصاویر به حوزه مکان پس از اصلاح ضرایب موجک داشتند مانند کاهش نویز و آشکارسازی نبود و دلیل آن اساساً به خاطر نداشتن ویژگی تغییر ناپذیر بودن با انتقال<sup>۳</sup> بود. به

مقدار آستانه صفر می شوند [۵۶]. بسته به نحوه تعیین مقدار آستانه می توان این روش ها را به سه دسته کلی تقسیم بندی نمود [۵۷]:

#### • روش های آستانه فراگیر<sup>۱</sup>

در این دسته از روش ها، آستانه برای تمام ضرایب تبدیل در تمام زیر باندهای تبدیل مقدار ثابتی در نظر گرفته می شود. از جمله این روش ها می توان به روش Visu Shrink [۵۶] که در آن مقدار آستانه متناسب با انحراف معیار نویز انتخاب می شود، اشاره نمود.

#### • روش زیرباند وفقی<sup>۲</sup>

در این روش ها، آستانه هر کدام از زیرباندها به صورت جداگانه انتخاب می شود. از جمله این روش ها می توان به روش های Bayes Shrink [۵۸] که مقدار آستانه متناسب با واریانس نویز است و Sure Shrink [۵۹] که مقدار آستانه از طریق مینیمم کردن ریسک نا اریب اشتاین<sup>۳</sup> به دست می آید اشاره نمود.

#### • روش های وفقی-مکانی<sup>۴</sup>:

در این روش ها، مقدار آستانه برای هر ضریب موجک (یا دسته ای از آنها) به صورت جداگانه محاسبه می شود. از جمله این روش ها می توان به روش Neigh Shrink [۶۰] که در آن از ضرایبی که در همسایگی ضریب موجکی که باید آستانه گذاری شود، قرار دارند برای تعیین مقدار آستانه استفاده می شود اشاره نمود.

### ۲-۱ روش های مبتنی بر رایانش نرم

رایانش نرم از جمله مباحثی از علوم کامپیوتر است که کاربرد فراوانی در علوم مختلف از جمله پردازش تصویر دارد. در حوزه تبدیل نیز از روش هایی مانند روش های مبتنی بر الگوریتم وراثتی [۶۱]، روش های فازی [۶۲] و روش های مبتنی بر شبکه های عصبی [۶۳، ۵۷] برای کاهش نویز تصاویر استفاده شده است.

### ۳-۱ روش های مبتنی بر مدل های آماری

در این دسته از روش ها، برای کاهش نویز تصاویر از مدلسازی آماری ضرایب تبدیل، توسط معرفی تابع چگالی احتمال مناسب ضرایب تبدیل استفاده شده است.

هدف از این مقاله، مرور جامعی بر روی مقالات جدید ارائه شده به منظور کاهش نویز تصاویر در حوزه ی تبدیل با استفاده از مدل های آماری می باشد. برای این منظور، علاوه بر اشاره بر جنبه های تئوری روش های موجود، از لحاظ کارایی آنها در فرایند کاهش نویز نیز مقایسه شده اند. در ادامه پس از بررسی فرایند کاهش نویز در روشهای مبتنی بر مدل های آماری و توضیح قسمت های مختلف آن در بخش دوم، در بخش سوم روش های

<sup>5</sup> Artifact

<sup>6</sup> Short Time Fourier Transform

<sup>7</sup> Singularity

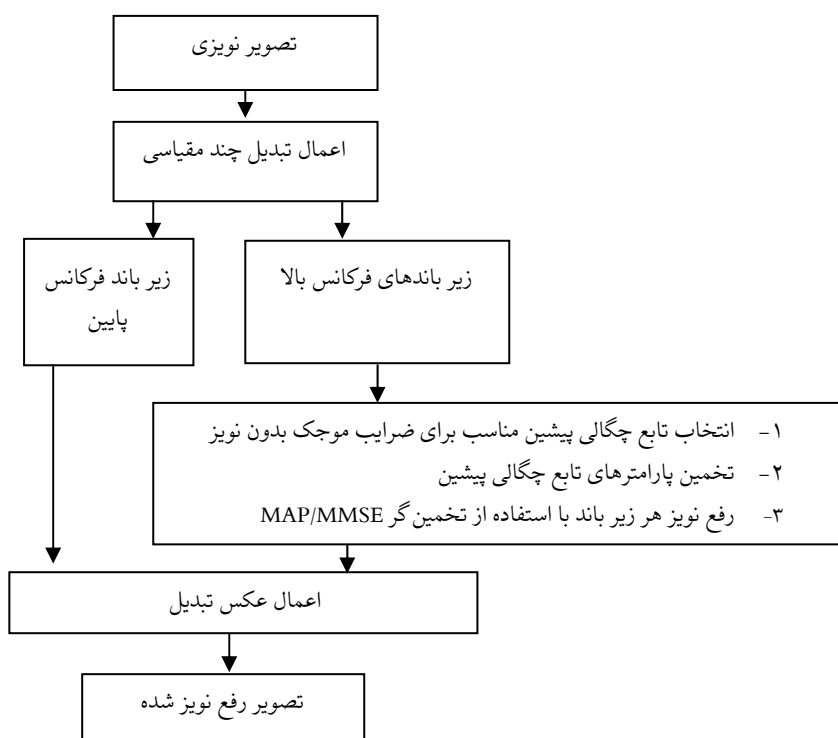
<sup>8</sup> Shift invariance

<sup>1</sup> Universal threshold

<sup>2</sup> Sub-band adaptive

<sup>3</sup> Stein Unbiased Risk Estimator

<sup>4</sup> Spatially adaptive



شکل ۱: مراحل کاهش نویز تصویر در حوزه تبدیل با استفاده از مدل آماری

ندارد. برای رفع این ضعف حوزه تبدیل موجک، تبدیل جدیدی به نام تیغک ها<sup>۵</sup> معرفی شدند [۷۰]. ایده این تبدیل نگاشت تکین خطی به تکین نقطه ای با استفاده از تبدیل رادون است. بنابراین این تبدیل، قابلیت بازنمایی تغییرات در طول خطوط صاف و در جهت های مختلف را دارد.

برای بازنمایی قسمت های تکین دار در امتداد منحنی، تبدیل پیچک معرفی شده است [۷۱-۷۳]. ایده اصلی این تبدیل پنجره بندی تصویر ورودی برای تبدیل انحناهای موجود به صورت مجموعه ای از خطوط در زیر بخش های تصویر است. سپس برای تحلیل هر خط از تبدیل تیغک استفاده می شود. این تبدیل که علاوه بر مقیاس و موقعیت، اندیس جهت را نیز دارا می باشد، برای آشکارسازی نواحی انحنا دار از تبدیل موجک و تیغک بهتر عمل می کند.

کنتورهای (مرزهای) تصاویر، شامل یکسری خصوصیات هندسی ذاتی هستند که به عنوان ویژگی های کلیدی در اطلاعات بصری به حساب می آیند. تبدیل مرزک به طور موثری، مرزهای هموار که اجزای اصلی و مهم در تصاویر طبیعی می باشند را توصیف می کند. این تبدیل شامل تجزیه هرم لاپلاسی می باشد که طی آن تصویر به زیرباندهای مختلف تقسیم بندی شده و در ادامه در هر زیرباند، بانک های فیلتری جهت دار<sup>۶</sup> (DFB) اعمال می شود. تبدیل مرزک در مقایسه با تبدیل موجک از لحاظ چند

دلیل نداشتن این ویژگی، کوچکترین جابجایی در تصویر منجر به تغییرات گسترده در ضرایب موجک می شود. نویسندگان در مرجع [۶۶] نشان دادند که با حذف مرحله کاهش<sup>۱</sup> و ارائه تبدیل موجک غیر کاهش<sup>۲</sup> نتایج در کاربردهای رفع نویز حدود ۲/۵ db بهبود می یابد، اگرچه این عمل با افزایش هزینه محاسباتی همراه است.

در مرجع [۶۷] نویسندگان تبدیل موجک مختلط<sup>۳</sup> (DT-CWT) را ارائه دادند که به دلیل استفاده از موجک مادر مختلط، تقریباً تغییر ناپذیر با انتقال می باشد و تعداد جهت ها نیز بهبود یافته است. با اینکه پیچیدگی آن<sup>۴</sup> برای سیگنال های  $d$  بعدی می باشد.

در مرجع [۶۸] فرم غیر کاهش<sup>۴</sup> تبدیل موجک مختلط<sup>۴</sup> (UDT-CWT) ارائه شد که با حذف مرحله کاهش<sup>۱</sup>، کارایی این الگوریتم را بهبود دادند. تبدیل هرم جهت دار، تبدیل خطی افزونه ای است که در واقع تعمیم تبدیل موجک می باشد که علاوه بر چند مقیاسی بودن، چرخش را نیز در نظر گرفته و در آشکارسازی نقاط تکینی بعد بالا مانند خطوط و منحنی ها عملکرد بهتری نسبت به تبدیل موجک دارد [۶۹].

تبدیل موجک برای تحلیل ناپوستگی های نقطه ای خوب عمل می کند، اما برای هموارسازی لبه های انحنا دار عملکرد خوبی

<sup>1</sup> Decimation

<sup>2</sup> Undecimated wavelet transform

<sup>3</sup> Dual-Tree Complex Wavelet Transform

<sup>4</sup> Undecimated dual-tree complex wavelet transform

<sup>5</sup> Ridgelete

<sup>6</sup> Directional filter bank

BARBARA که در شکل ۲ نشان داده شده اند، در شکل ۳ نشان داده شده است. تفسیر ابتدایی این است که تصاویر طبیعی شامل نواحی هموار با لبه های پراکنده می باشند، نواحی هموار ضرایب با اندازه های کوچک و لبه ها ضرایب تنک با اندازه های بزرگ تولید می کنند [۵۵]. به همین دلیل محققان سعی نموده اند از توابع حاشیه ای نوک تیز و دنباله سنگین به عنوان تابع احتمال پیشین ضرایب موجک استفاده نمایند.



الف



ب



ج

شکل ۲ تصاویر استاندارد الف: LENA ب: BOAT ج: BARBARA

جهتی بودن بهبود یافته است. اگرچه تبدیل های دیگر مانند موجک مختلط، پیچک و تیغک نیز خاصیت چند مقیاسی و جند جهتی بودن را دارند اما تبدیل مرکز این انعطاف پذیری را دارد که می توان در هر مقیاس از تعداد جهت های دلخواه استفاده نمود. همچنین این تبدیل از لحاظ پیچیدگی محاسباتی نیز مقرون به صرفه می باشد [۷۴].

تبدیل مرکز بدون نمونه برداری<sup>۱</sup> (NSCT)، تبدیل مرکز است که در آن بانک های فیلتری زیر نمونه برداری نمی شوند. بنابراین با اینکه افزونگی آن نسبت به تبدیل مرکز بیشتر است اما اطلاعات هندسی تصاویر را بهتر حفظ می کند [۴۷، ۷۵].

در سال های اخیر، نمایش قیچک<sup>۲</sup> نیز به عنوان یکی از تبدیل های موجک چند جهته معرفی شده است. نسخه اولیه آن برای پردازش تصاویر توسط نویسندگان در مرجع [۷۶] توسعه یافت و نسخه های چند مقیاسی آن برای سیگنال های چند مقیاسی نیز به وجود آمده است. این تبدیل دارای پارامتر مقیاس برای مقیاس بندی، پارامتر ناهمسان گرد زاویه ای برای جهت مشخص شده و پارامتر انتقال برای وضعیت مکانی می باشد. این تبدیل نسبت به تبدیل مرکز بسیار منعطف تر است و به کاربر اجازه می دهد که پیاده سازی های خود را با کنترل کامل بر ویژگی های این تبدیل و بر اساس ویژگی هایی که برای کاربرد مورد نظر سازگار باشد ایجاد کند [۷۷].

تبدیل موجک چهارگانه<sup>۳</sup> (QWT) تبدیل چند مقیاسی جدیدی برای پردازش سیگنال و تصویر می باشد که مبتنی بر نظریه تبدیل دو بعدی هیلبرت می باشد [۷۸]. این تبدیل دارای یک مقدار اندازه و سه زاویه فازی است. دو زاویه برای مکان و یک زاویه جهت اطلاعات بافت می باشد. این تبدیل نسبت به تبدیل موجک امکان تحلیل غنی تری در مقیاس فضایی را فراهم می کند.

## ۲-۲ انتخاب تابع چگالی پیشین مناسب

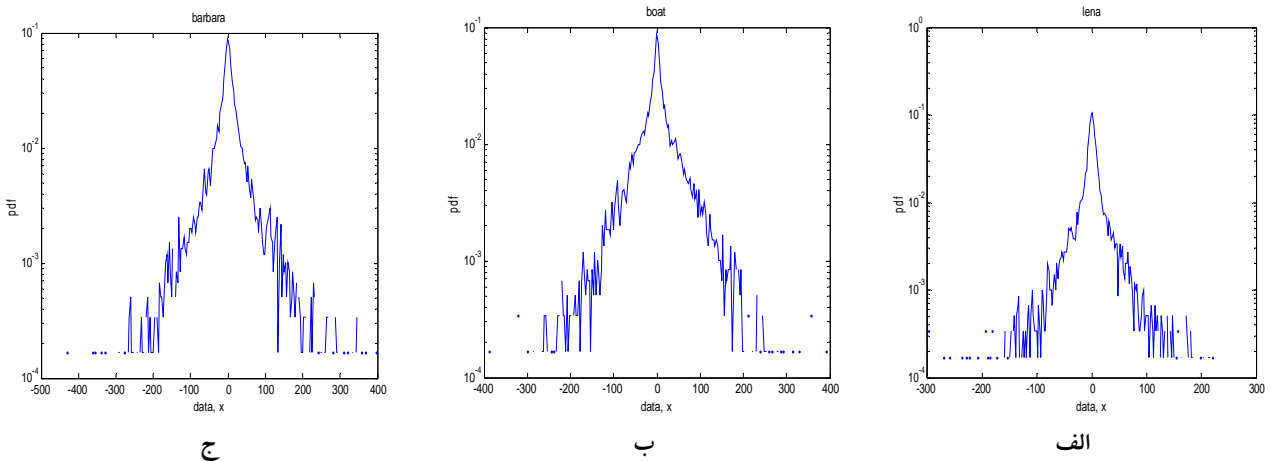
پس از اعمال تبدیل چند مقیاسی روی تصویر، زیر باندهای جزئیات جهت کاهش نویز پردازش می شوند. در این روش ها نیاز به در نظر گرفتن تابع چگالی احتمال پیشین سیگنال  $p(x)$  می باشد.

همانطور که اشاره شد، تبدیل موجک به دلیل خواص و ویژگی هایش در دهه های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به دلیل خاصیت فشردگی (تنک بودن) تبدیل موجک مشاهده شده است که توابع پیشین ضرایب موجک در مقایسه با توزیع گاوسی، نوک تیز هستند و دنباله های سنگین تری دارند [۷۹، ۸۰]. زیر باند عمودی تبدیل موجک برای تصاویر استاندارد LENA، BOAT و

<sup>1</sup> Non-sampled contourlet transform

<sup>2</sup> Shearlet

<sup>3</sup> Quaternion Wavelet Transform

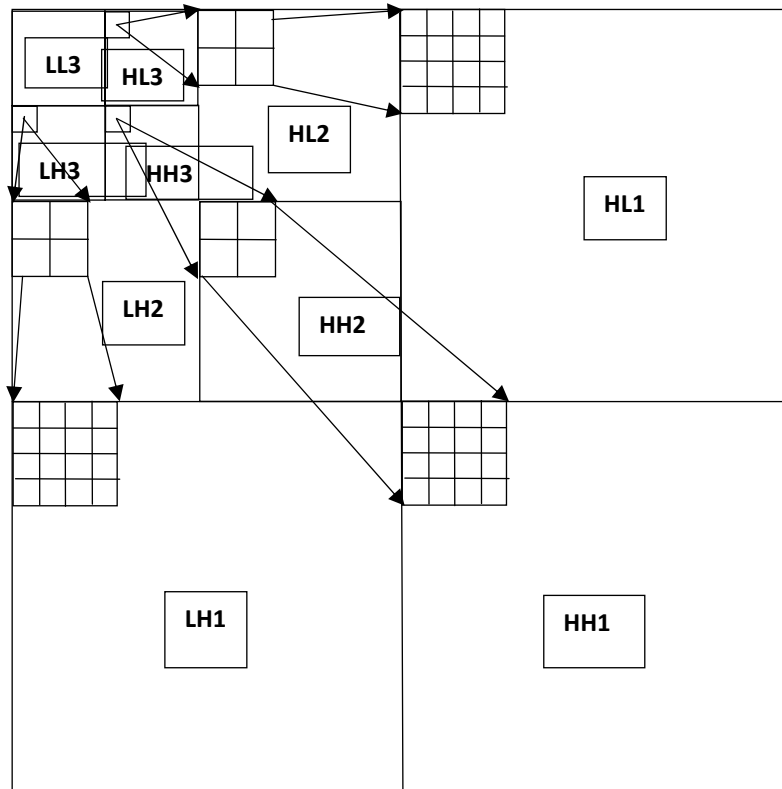


شکل ۳: هیستوگرام مربوط به زیرباند عمودی تصاویر استاندارد الف: LENA ب: BOAT ج: BARBARA

[۸۱]. از این رو استفاده از توابع دو یا چند متغیره برای در نظر

گرفتن همبستگی ضرایب موجک مورد توجه قرار گرفته است. در شکل ۴ تبدیل موجک در در سه سطح (مقیاس) نمایش داده شده است و ضریب موجک و والد آن (هر ضریب والد در سطح K با چهار ضریب فرزند در سطح K-1 و در همان جهت وابستگی دارد) و همچنین همسایگی ها در سطوح مجاور نمایش داده شده اند.

به دلیل خاصیت پایداری و خوشه بندی تبدیل موجک، ضرایب موجک به ضرایب مجاور در موقعیت، سطوح و جهت های مختلف وابستگی دارند. همچنین تحقیقات نشان داده اند که برای طیف وسیعی از تصاویر، ضریب موجک و ضریب والد آن (ضریب موجک در همان موقعیت مکانی اما در مقیاس بالاتر) وابستگی آماری دارند. این وابستگی آماری، برای ضرایب در موقعیت های مکانی مجاور و جهت های مجاور نیز صدق می کند



شکل ۴: ضرایب تبدیل موجک متعامد در سطوح و موقعیت های مختلف



## ۲-۴ رفع نویز هر زیر باند با استفاده از تخمین گر مناسب

در روش های آماری، برای تخمین ضرایب بدون نویز از ضرایب نویزی، اغلب از معیار MAP و یا  $MMSE^7$  استفاده شده است: MAP [۸۷]:

$$\hat{x} = \arg \max_x p(x|y) = \arg \max_x \frac{p(y|x)p_x(x)}{p_Y(y)} \quad (2)$$

MMSE [۸۸]:

$$\hat{x} = \int xp(x|y)dx = \int \frac{xp(x)p(y|x)}{p(y)}dx \quad (3)$$

پس از رفع نویز زیرباندهای جزئیات، عکس تبدیل چند مقیاسی روی زیرباندها اعمال می شود و تصویری که نویز آن کاهش یافته، حاصل می شود. در زیربخش بعد به مهمترین مقالات مبتنی بر روشهای آماری در حوزه تبدیل اشاره می شود.

## ۳ مروری بر کارهای انجام شده

اگرچه روشهای آماری رفع نویز در حوزه تبدیل را می توان از جنبه های مختلف دسته بندی نمود که نمودار آن در شکل ۵ نشان داده شده است. در ادامه مقاله این روش ها از لحاظ نوع تابع تبدیل استفاده شده دسته بندی شده اند اما در هر روش به نحوه تخمین ضرایب، روش تخمین پارامترها و حوزه تبدیل به کار رفته شده نیز اشاره شده است.

در این مقاله، به مهمترین روش ها که از توابع تک متغیره و چند متغیره به عنوان توابع توزیع پیشین ضرایب موجک استفاده شده است، اشاره می شود.

## ۲-۳ روش های تخمین پارامترهای تابع چگالی احتمال پیشین

یکی از روش های تخمین پارامترهای تابع چگالی احتمال پیشین، استفاده از روش  $ML^1$  است که با بیشینه کردن تابع درست نمایی، پارامترها برآورد می شوند. در تخمین پارامترها به روش  $MAP^2$ ، برای پارامترها، توزیع احتمال پیشین در نظر گرفته می شود، سپس پارامترها با بیشینه کردن تابع چگالی پسین برآورد می شوند.

در بسیاری از مسئله های تخمین پارامترهای مدل آماری، به شکلی از تابع درست نمایی برخوردار می کنیم که امکان بیشینه سازی آن به روش تحلیلی وجود ندارد. در چنین مواقعی با استفاده از متغیر پنهان (که البته مقدار آن نیز مشاهده نشده است) ممکن است مدل تابع درست نمایی ساده تر شده و امکان محاسبات عددی برای بیشینه سازی را فراهم کند. الگوریتم  $EM^3$  [۸۲] یکی از روشهایی است که بر اساس وجود متغیر پنهان، امکان برآورد پارامترهای مدل آماری را میسر می کند. در این الگوریتم، ابتدا مقدار اولیه برای پارامترها در نظر گرفته می شود و امید ریاضی متغیرهای پنهان به شرط داده های مشاهده شده، محاسبه می شود (میانگین گیری). سپس با حداکثر کردن لگاریتم تابع درست نمایی پارامترها را برآورد می کنند (بیشینه سازی<sup>۴</sup>). این کار را تا زمانی که الگوریتم به همگرایی برسد تکرار می کنیم.

از دیگر روش های تخمین پارامتر که مورد استفاده قرار گرفته است روش گشتاوری است که در آن تخمین گشتاورهای توزیع احتمال، با مقدار نظری گشتاورها (که تابعی از پارامترها می باشد) برابر قرار داده شده و پارامترها تخمین زده می شوند [۸۳]. این روش نسبت به روش های دیگر ساده تر است، اما روش های دیگر تقریب های بهتری را تولید می کنند.

بر اساس نتایج شبیه سازی در مقالات، در تخمین پارامتر به صورت محلی<sup>۶</sup> (با استفاده از پنجره با اندازه مشخص) نسبت به تخمین پارامتر در هر زیر باند، به دلیل بهره گیری از وابستگی ضرایب موجک، نتایج بهتری حاصل شده است [۸۴-۸۶].

<sup>1</sup> Maximum Likelihood

<sup>2</sup> Maximum a posteriori

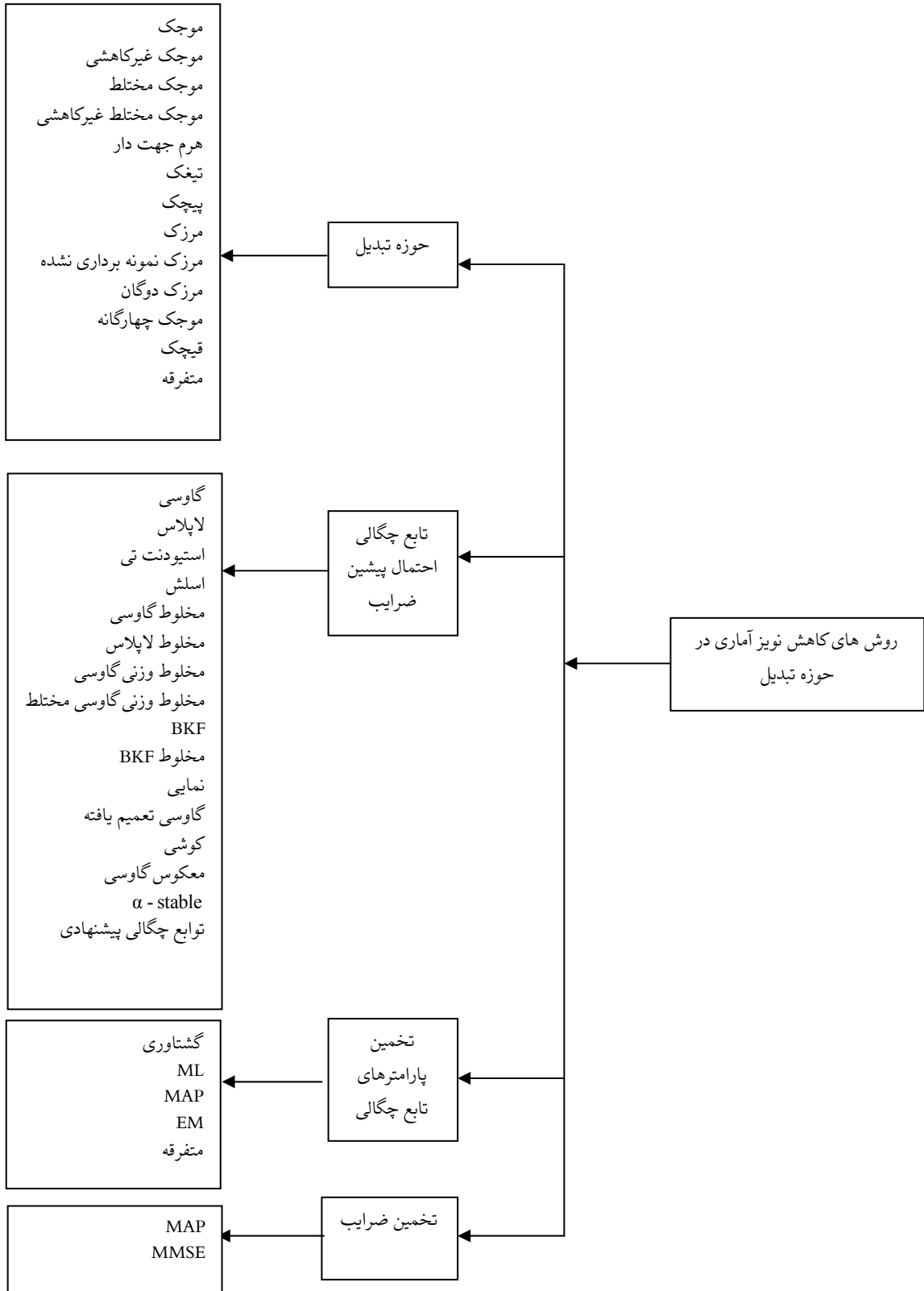
<sup>3</sup> Expectation-Maximization

<sup>4</sup> Expectation

<sup>5</sup> Maximization

<sup>6</sup> Local

<sup>7</sup> Maximum Mean Square Error



شکل ۵: چالش های مهم در روش های کاهش نویز مبتنی بر مدل های آماری در حوزه تبدیل



### ۳-۱ روش های مبتنی بر مدل کردن ضرایب تبدیل با استفاده از توابع تک متغیره

در مرجع [۸۹] از معیار MMSE برای تخمین ضرایب استفاده شده و توزیع لاپلاس تعمیم یافته به عنوان تابع پیشین ضرایب موجک استفاده شده است [۸۹].

$$p(x) \propto e^{-\frac{|x|}{s}} \quad (۴)$$

برای تخمین پارامترهای  $p$  و  $s$  از روش گشتاوری استفاده شده است و رفع نویز در حوزه هرم جهت دار می باشد. نتایج شبیه سازی نشان داده اند که کارایی این روش بهتر از فیلتر وینر می باشد [۸۹].

در مرجع [۹۰] ضرایب موجک به صورت متغیرهای تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma$  مدل شده اند. در این مقاله، پارامترهای توزیع به صورت محلی و با استفاده از معیار MAP تخمین زده شده اند (در واقع در این مقاله برای واریانس-های محلی به جای پارامترهای معین غیر معلوم، احتمال پیشین در نظر گرفته شده است) و سپس معیار MMSE برای تخمین ضرایب موجک به کار رفته است. این روش LAWMAP نامیده شده و نتایج شبیه سازی نشان داده اند که از فیلتر وینر و روش آستانه گذاری سخت بهتر عمل می کند.

در مرجع [۹۱] از معیار MAP برای رفع نویز در حوزه تبدیل موجک استفاده شده است و سه تابع دنباله سنگین لاپلاس، استیودنت تی<sup>۱</sup> و اسلش<sup>۲</sup> به عنوان مدل پیشین ضرایب موجک پیشنهاد شده اند. پارامترهای توزیع از روش EM و به صورت محلی تخمین زده شده اند. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که عملکرد توزیع استیودنت تی بهتر از دو توزیع دیگر بوده است.

در مرجع [۸۳]، رفع نویز در حوزه تبدیل موجک و با استفاده از معیار MMSE صورت گرفته است. تابع BKF<sup>۳</sup> به عنوان مدل احتمال پیشین معرفی شده و پارامترهای توزیع از روش گشتاوری محاسبه شده اند. نتایج شبیه سازی نشان داده اند که کارایی این روش از روش آستانه گذاری و توزیع  $\alpha$ -stable بهتر است.

در مرجع [۹۲]، ضرایب موجک به صورت چگالی مخلوط گاوسی مدل شده اند و پارامترهای مدل به صورت محلی با استفاده از الگوریتم EM تخمین زده شده اند. برای تخمین ضرایب از معیار MAP استفاده شده و رفع نویز در حوزه تبدیل موجک می باشد. نتایج شبیه سازی نشان داده، این روش که Gauss-Mix-ShrinkL نامیده می شود کارایی بهتری از روش HMT<sup>۴</sup> [۵۵]، روشهای آستانه گذاری و روش LAWMAP دارد.

در مرجع [۹۳، ۸۵] ضرایب موجک در هر زیر باند با چگالی مخلوط لاپلاس مدل شده و پارامترهای مدل نیز با استفاده از الگوریتم EM به صورت محلی تخمین زده شده اند و رفع نویز در حوزه تبدیل موجک مختلط صورت گرفته است. این روش که برای تخمین ضرایب بدون نویز از معیار MAP استفاده شده Lap-Mix-ShrinkL نامیده شده است. در مرجع [۹۴]، نویسندگان الگوریتم رفع نویزی بر اساس مدل کردن ضرایب در حوزه تبدیل مرکز ارائه کرده اند که در هر زیر باند، ضرایب با استفاده از تابع چگالی احتمال پیشین NIG<sup>۵</sup> و با استفاده از معیار MAP تخمین زده شده اند. پارامترهای مدل به صورت گشتاوری و محلی تخمین زده شده اند و همچنین الگوریتم چرخش متناوب<sup>۶</sup> جهت اصلاح پدیده گیسی در تبدیل مرکز جهت بهبود نتایج به کار رفته است.

در مرجع [۹۵] روش رفع نویز در حوزه هرم جهت دار با استفاده از تابع چگالی لاپلاس به صورت محلی و با استفاده از معیار MAP تخمین زده شده است. این روش SoftLMAP نامیده شده است. در مرجع [۹۶] تابع چگالی NIG به عنوان تابع چگالی پیشین ضرایب در معیار MAP استفاده شده و رفع نویز در حوزه تبدیل موجک چهارگانه که تبدیلی تغییر ناپذیر با انتقال می باشد صورت گرفته است. پارامترهای مدل به صورت محلی و از روش گشتاوری محاسبه شده اند. این روش QING نامیده شده و کارایی آن از روش BM3D [۹۷] بهتر می باشد. مرجع [۹۸] بهبود یافته مدل LAWMAP [۹۰] می باشد که در آن مدل ضرایب موجک، گاوسی با واریانس  $\theta$  است که برای  $\theta$  مدل نمایی  $\lambda e^{-\lambda\theta}$  در نظر گرفته شده است و کارایی آن از روش LAWMAP بهتر می باشد. در مرجع [۹۹] نویسندگان سه توزیع مخلوط گاوسی، مخلوط BKF و مخلوط لاپلاس را در حوزه موجک گسسته<sup>۷</sup>، موجک مختلط گسسته<sup>۸</sup> [۶۷]، مرکز گسسته<sup>۹</sup> [۷۴]، پیچک گسسته<sup>۱۰</sup> [۱۰۰] و با استفاده از معیارهای MAP و MMSE برای تصاویر استاندارد مقایسه کرده اند. روشهای LapMixShrinkLMMSE، LapMixShrinkLMMSE و BKMixShrinkLMMSE

با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج شبیه سازی نشان می دهد برای تصاویر شلوغ، توزیع های LapMixShrinkLMMSE و GaussMixShrinkL برای تصاویر غیر شلوغ توزیع LapMixShrinkLMMSE کارایی بهتری دارند. توزیع های BKMixShrinkLMMSE و BKMixShrinkLMMSE نیز کارایی شبیه به توزیع های دیگر دارند در حالی که اعمال آنها ساده تر است. همچنین در سطوح نویز پایین معیار MAP و در

<sup>5</sup> Normal Inverse Gaussian

<sup>6</sup> Cycle Spinning

<sup>7</sup> Discrete Wavelet Transform

<sup>8</sup> Discrete Complex Wavelet Transform

<sup>9</sup> Discrete Contourlet Transform

<sup>10</sup> Discrete Curvelet Transform

<sup>1</sup> Student t

<sup>2</sup> Slash

<sup>3</sup> Bessel K Form

<sup>4</sup> Hidden Markov Tree

معیار حد متوسطی از میزان انحراف معیار نویز است در این مقاله نیز نتایج رفع نویز براساس این انحراف معیار می باشند.

سطوح نویز بالا کارایی معیار MMSE بهتر بوده است. در مرجع [۱۰۱] رفع نویز با در نظر گرفتن مخلوط چگالی احتمال گاوسی با تخمین پارامترها به صورت محلی و با استفاده از روش الگوریتم EM و معیار MAP در حوزه پیچک ارائه شده که کارایی آن از حوزه موجک بهتر است. جدول ۱، کارایی روش های تک متغیره برای تصاویر استاندارد LENA، BOAT و BARBARA را بر اساس معیار PSNR نشان می دهد. از آنجایی که در اکثر مقالات نتایج برای انحراف معیار نویز  $\sigma_n = 20$  ارائه شده و این انحراف

جدول ۱: مقایسه روش های تک متغیره بر اساس معیار PSNR

ردیف	نام روش	نوع تابع چگالی	روش تخمین پارامترهای تابع چگالی	روش تخمین ضرایب	حوزه تبدیل	LENA	BARBARA	BOAT
۱	LAWMAP [90]-1999	گاوسی	MAP	MMSE	موجک	۳۰/۹۲	۲۸/۵۷	-
۲	STUDENT-T [91]-2005	استیودنت تی	EM	MAP	موجک	۳۱/۵۴	۲۹/۲۲	-
۳	Gauss-Mix-ShrinkL [92]-2006	مخلوط گاوسی	EM	MAP	موجک	۳۰/۹۷	۲۸/۶۰	۲۹/۱۵
۴	Gauss-Mix-ShrinkL [85]-2008	مخلوط گاوسی	EM	MAP	موجک مختلط	۳۲/۰۷	۲۹/۸۵	۲۹/۸۴
۵	Gauss-Mix-ShrinkL [99]-2010	مخلوط گاوسی	EM	MAP	مرزک	۲۹/۱۹	۲۷/۶۶	-
۶	Gauss-Mix-ShrinkL [101]-2007	مخلوط گاوسی	EM	MAP	پیچک	۳۱/۴۸	۲۸/۵۹	۲۹/۲۳
۷	Lap-Mix-ShrinkL [85]-2008	مخلوط لاپلاس	EM	MAP	موجک	۳۰/۸۸	۲۸/۱۲	۲۸/۹۵
۸	Lap-Mix-ShrinkL [85]-2008	مخلوط لاپلاس	EM	MAP	موجک مختلط	۳۲/۲۸	۲۹/۹۰	۲۹/۸۷
۹	Lap-Mix-ShrinkL [85]-2008	مخلوط لاپلاس	EM	MMSE	موجک مختلط	۳۱/۹۴	۲۹/۷۷	۲۹/۸۸
۱۰	Lap-Mix-ShrinkL [99]-2010	مخلوط لاپلاس	EM	MAP	پیچک	۳۱/۴۴	۲۸/۱۸	-
۱۱	Lap-Mix-ShrinkL [99]-2010	مخلوط لاپلاس	EM	MAP	مرزک	۲۹/۳۸	۲۷/۵۹	-
۱۲	BKMixShrinkL [99]-2010	مخلوط BKF	EM	MAP	موجک مختلط	۳۱/۷۰	۲۹/۲۳	۲۹/۵۹
۱۳	BKMixShrinkL [99]-2010	مخلوط BKF	EM	MMSE	موجک مختلط	۳۱/۴۴	۲۹/۱۸	۲۹/۳۹
۱۴	NIG [94]-2010	گاوسی معکوس	گشتاوری	MAP	مرزک	۳۱/۴۴	-	-
۱۵	SoftL [95]-2009	لاپلاس	ML	MAP	هرم جهت دار	-	۳۰/۲۶	-
۱۶	QING [96]-2015	گاوسی معکوس	گشتاوری	MAP	موجک چهارگانه	۳۳/۰۸	۳۲/۶۸	۳۲/۹۵
۱۷	MODIFIED LAWMAP [98]-2016	گاوسی	MAP	MMSE	موجک	۳۱/۴۳	۳۰/۵۹	-

### ۲-۳ روش های مبتنی بر مدل کردن ضرایب تبدیل با استفاده از توابع چند متغیره

در مرجع [۱۰۲] از معیار MAP برای تخمین ضرایب استفاده شده است و جهت استفاده از همبستگی ضرایب موجک و والد آن، تابع دو متغیره زیر به عنوان تابع احتمال پیشین ضرایب موجک پیشنهاد شده است [۱۰۲]:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{3}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sigma} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \quad (5)$$

پارامترهای توزیع با استفاده از تخمین ML در هر زیر باند محاسبه شده اند و رفع نویز در حوزه موجک مختلط انجام شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که این روش از روش های آستانه گذاری و HMT بهتر عمل میکند.

در مرجع [۱۰۳] نویسندگان از مدل مرجع [۱۰۲] استفاده کرده اند اما در این مقاله پارامترهای توزیع احتمال به صورت محلی برای هر ضریب محاسبه شده اند. این روش BiShrinkL نامیده شده و کارایی آن از روش ارائه شده در [۱۰۲] بهتر است.

در مرجع [۸۴] از معیار MAP برای تخمین ضرایب در حوزه موجک مختلط استفاده شده است و تابع کوشی دو متغیره با واریانس محلی به عنوان تابع احتمال پیشین ضریب موجک و والد آن در نظر گرفته شده است. بنابراین با استفاده از این مدل از خواص محلی بودن و پایداری تبدیل موجک استفاده شده است. این روش CauchyShrinkL نامیده شده و نتایج شبیه سازی نشان می دهد که این روش از روشهای آستانه گذاری بهتر عمل می کند.

در مرجع [۱۰۴] برای رفع نویز ضرایب در حوزه مرکز دوگان<sup>۱</sup> از تابع چگالی دو متغیره استوانه ای متقارن (معادله ۵) در معیار MAP که پارامترهای آن به صورت محلی تخمین زده شده اند استفاده شده است. این روش DCTBI نامیده شده است. در مرجع [۱۰۵] از توزیع دو متغیره لاپلاسی غیرایزوتروپیک [۱۰۵]:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{3}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2}\right) \quad (6)$$

در حوزه تبدیل مرکز بدون نمونه برداری و معیار MAP برای رفع نویز استفاده شده است. پارامترهای توزیع به صورت محلی تخمین زده شده اند و این روش ABNSCT<sup>۲</sup> نامیده شده است و کارایی آن از روش BLS-GSM بهتر می باشد.

در مرجع [۱۰۶] از تابع چگالی دو متغیره  $\alpha$ -stable به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین در معیار MMSE در حوزه مرکز استفاده شده است. برای تخمین پارامترها از روش گشتاوری استفاده شده است این روش CT-BI-SaS نامیده شده است.

در مرجع [۱۰۷] از توزیع پیشنهادی در روش Bishrink [۱۰۲] استفاده شده اما رفع نویز در حوزه قیچک صورت گرفته و نتایج بهبود یافته اند.

در مرجع [۱۰۸] از تابع چگالی مخلوط گاوسی دو متغیره به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب در معیار MAP در حوزه موجک مختلط پیشنهاد شده است و BiGaussMixShrink نامیده شده است.

در مرجع [۱۰۹] برای کاهش نویز از معیار MMSE استفاده شده و تابع چگالی احتمال دو متغیره NIG به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب در حوزه موجک مختلط پیشنهاد شده است. پارامترهای توزیع از روش گشتاوری و به صورت محلی تخمین زده شده اند.

در مرجع [۱۱۰] تابع کوشی دو متغیره به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب موجک مختلط غیرکاهشی [۶۸] در معیار MAP با تخمین پارامترها با استفاده از تابع مشخصه جهت کاهش نویز استفاده شده است. به دلیل تغییر ناپذیر با انتقال تبدیل موجک مختلط غیرکاهشی، جوابها نسبت به استفاده از همین مدل در حوزه تبدیل موجک مختلط، بهبود یافته اند.

در مرجع [۱۱۱, ۱۱۲] نویسندگان روش رفع نویز با استفاده از اندازه ضرایب موجک را توسط تابع دو متغیره کوشی-رایلی در حوزه موجک مختلط پیشنهاد داده اند. همچنین در مرجع [۸۷] اندازه ضرایب موجک مختلط با استفاده از توابع استودنت تی-رایلی و لاپلاس-رایلی مدل شده اند. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که رفع نویز اندازه ضرایب موجک مختلط بهتر از رفع نویز جداگانه قسمت های حقیقی و موهومی به صورت جداگانه است.

در مرجع [۸۸] از معیار MMSE برای تخمین ضرایب استفاده شده و تابع چگالی سه متغیره نمایی شعاعی<sup>۳</sup> به عنوان مدل احتمال پیشین ضرایب موجک پیشنهاد شده و MMSE-Trishrink-Radial نامیده شده که کارایی آن از روش های CauchyShrinkL و Bayes-Shrink بهتر می باشد.

در مرجع [۱۱۳] تابع توزیع سه متغیره زیر به عنوان مدل ضرایب پیشین در حوزه موجک مختلط پیشنهاد شده است [۱۱۳]:

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^3 \exp\left(\frac{-2}{\sigma} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \quad (7)$$

در واقع در این مقاله از وابستگی ضریب موجک، والد و فرزند آن برای تخمین ضریب مرجع استفاده شده است. تخمین گر مورد استفاده MAP می باشد، پارامترهای مدل به صورت محلی تخمین زده شده اند و نتایج شبیه سازی بیانگر عملکرد بهتر آن نسبت به روش های HMT، Bi-shrink، LAWMAP و روشهای آستانه گذاری است.

<sup>1</sup> Dual-Contourlet

<sup>2</sup> Anisotropic Bivariate Non Sub-sampled Contourlet Transform

<sup>3</sup> Multivariate radial exponential pdf

$$x = \sqrt{z}u \quad p(z) \propto \frac{1}{z} \quad (10)$$

توابع چگالی GSM متقارن، دارای میانگین صفر و چگالی حاشیه ای با کشیدگی زیاد هستند. در این مقاله از تخمین MMSE استفاده شده است و پارامترهای توزیع چند متغیره (ماتریس کواریانس سیگنال) به صورت محلی در هر زیر باند محاسبه شده اند. این روش BLS-GSM نامیده شده است و کارایی بسیار خوبی در حوزه تبدیل موجک چند متغیره داراست.

در مرجع [۱۲۱] نویسندگان مدل GSM را توسعه داده اند و بلوک های ضرایب را به صورت زیر مدل کرده اند [۱۲۱]:

$$x = \sqrt{z}R(\theta)u \quad (11)$$

این روش OAGSM<sup>۵</sup> نامیده شده و جهت در نظر گرفتن انطباق با جهت محلی سیگنال از متغیر تغییر پذیر با مکان  $\theta$  استفاده شده است. با توجه به اینکه ممکن است تصویر ویژگی هایی مثل گوشه ها و بافت هایی که جهت ندارند یا ترکیبی از چند جهت هستند باشد، مدل کردن این نواحی با OAGSM ممکن است کارایی روش رفع نویز را کاهش دهد. برای حل این مشکل مدل OAGSM را با مخلوط کردن آن با مدل GSM ساده، توسعه داده اند که در آن انتخاب بین دو مدل جهت دار و غیر جهت دار با پارامتری به نام  $\delta$  کنترل می شود. این مدل جدید OAGSM/NC<sup>۶</sup> نامیده شده و کارایی آن از روش GSM بهتر می باشد.

در مرجع [۱۲۲] از مدل مخلوط وزنی گاوسی مختلط<sup>۷</sup> برای تخمین ضرایب موجک مختلط پیشنهاد شده و در واقع تعمیم مدل GSM برای ضرایب مختلط است. این روش CGSM نامیده شده است.

مرجع [۱۲۳] توسعه یافته مدل GSM است که در آن برای متغیر پنهان به جای توزیع گاوسی، توزیع Gaussian-Hermite در نظر گرفته شده است. این توزیع Gaussian-Hermite Scale Mixture نامیده شده است.

در مرجع [۱۲۴] نیز روش BLS-GSM است که به جای تبدیل در حوزه هرم جهت دار از تبدیل NSCT استفاده شده است. نتایج شبیه سازی نشان داده اند که اگرچه کارایی آن از روش BLS-GSM کمتر است اما زمان محاسبات آن کمتر می باشد.

در مرجع [۱۲۵] تابع چگالی مخلوط وزنی گاوسی مختلط و معیار MMSE برای مدل کردن ضرایب مختلط در حوزه PDTDFB [۱۲۶، ۱۲۷] ارائه شده و CGSM-PDTDFB نامیده شده است.

مرجع [۱۲۸] بهبود یافته روش BLS-GSM است که در آن ماتریس کواریانس به جای هر زیرباند، در یک پنجره به صورت

در مرجع [۱۱۴] توزیع گاوسی تعمیم یافته چند متغیره (MGD) جهت استفاده از همبستگی ضرایبی که در همسایگی ضریب مرجع قرار دارند به عنوان مدل احتمال پیشین استفاده شده است. برای تخمین ضرایب از معیار MAP استفاده شده و جهت تخمین پارامترهای توزیع از انطباق داده ها<sup>۱</sup> با استفاده از ۲۰ تصویر استاندارد و به صورت محلی استفاده شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که این روش از روشهای آستانه گذاری، روش HMT و روش GSM [۱۱۵] بهتر عمل می کند.

در مرجع [۱۱۶] روشی چند متغیره با استفاده تابع توزیع ECD<sup>۲</sup> به عنوان مدل احتمال پیشین ضرایب و معیار MAP جهت تخمین ضرایب استفاده شده است. این مدل در واقع تعمیم مدل دو متغیره معرفی شده در مرجع [۱۰۲] است. پارامترهای مدل به صورت محلی تخمین زده شده اند و این روش که ECD<sup>۲</sup> نامیده شده در حوزه تبدیل موجک غیرکاشی [۱۱۷] صورت گرفته و کارایی آن از روشهای Bi-shrink و LAWMAP<sup>۳</sup> بهتر می باشد. در مرجع [۱۱۸] رفع نویز در حوزه تبدیل قیچک بدون نمونه برداری<sup>۴</sup> (NSST) صورت گرفته و تابع چند متغیره زیر به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب در تخمین گر MAP پیشنهاد گردیده است [۱۱۸]:

$$p(x) = K \exp\left(-\left[a\sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} + b\sum_{i=1}^k |x_i|\right]\right) \quad (8)$$

که  $K$  ثابت نرمال،  $k$  تعداد متغیرها و  $a$  و  $b$  پارامترهای توزیع هستند که به صورت محلی تخمین زده می شوند. این روش MNSST نامیده می شود. نتایج شبیه سازی بیانگر عملکرد بهتر این روش نسبت به روش GSM است.

در مرجع [۱۱۹] تابع چگالی چند متغیره زیر [۱۱۹]:

$$p(x) = \frac{K}{(2\pi\sigma)^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{J+1}}{\sigma} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_J^2}\right) \quad (9)$$

که  $K$  ثابت نرمال کننده و  $x_1^2$  تعداد متغیرها می باشد، به عنوان تابع احتمال پیشین ضرایب در معیار MAP و در حوزه مرکز پیشنهاد شده است. همچنین برای بهبود نتایج از روش چرخش متناوب استفاده شده است. نتایج شبیه سازی بیانگر عملکرد بهتر این روش نسبت به روشهای آستانه گذاری، HMT [۵۵]، NIG-NSCT [۱۲۰] و GSM [۱۱۵] است.

در مرجع [۱۱۵] از تبدیل هرم جهت دار به عنوان تبدیل خطی چند مقیاسی استفاده شده است. در این مقاله ضرایب در یک همسایگی محلی، حول یک ضریب مرجع در یک زیر باند هرم، با مدل GSM<sup>۴</sup> به صورت زیر مدل شده اند [۱۱۵]:

<sup>5</sup> Oriented Adaptive Gaussian Scale Mixture

<sup>6</sup> Oriented Adaptive Gaussian Scale Mixture /Non oriented Component

<sup>7</sup> Complex Gaussian Scale Mixture

<sup>1</sup> Data fitting

<sup>2</sup> Elliptically Contoured Distribution

<sup>3</sup> No-Sub-Sampled Shearlet Transform

<sup>4</sup> Gaussian Scale Mixture

محلی تخمین زده می شود و کارایی آن بهبود یافته است. این روش BLS-GSM متغیر با فضا نامیده شده است. مرجع [۱۲۹] نیز تغییر یافته مدل BLS-GSM است که در آن برای ناپیوستگی های لبه ها و شیارها در تصاویر از پارامتر فاز ضرایب، استفاده کرده است.

مرجع [۱۳۰] مخلوط BLS-GSM برای تخمین ضرایب در حوزه<sup>۱</sup> TIHP [۱۲۸] که پارامترهای مدل با الگوریتم EM تخمین زده شده اند به عنوان تابع احتمال پیشین ضرایب پیشنهاد شده است و کاهش نویز را بهبود داده است.

جدول ۲ کارایی روشهای چند متغیره برای تصاویر استاندارد LENA، BOAT و BARBARA برای انحراف معیار نویز  $\sigma_n = 20$  بر اساس معیار PSNR را نشان می دهد.

---

<sup>1</sup> Translation Invariant Haar Pyramid

جدول ۲: مقایسه روش های چند متغیره بر اساس معیار PSNR

ردیف	نام روش	تابع چگالی	روش تخمین پارامترهای تابع چگالی	روش تخمین ضرایب	حوزه تبدیل	LENA	BARBARA	BOAT
۱	BiShrink [102]-2002	تابع تبدیل معرفی شده	ML	MAP	موجک مختلط	۳۱/۷۱	۲۷/۷۸	۲۹/۸۱
۲	BiSHRINKL [103]-2002	تابع تبدیل معرفی شده	ML	MAP	موجک مختلط	۳۲/۴۰	۲۹/۸۰	۳۰/۰۸
۳	CauchyShrinkL [84]-2006	کوشی	ML	MAP	موجک مختلط	۳۲/۲۴	۲۹/۹۵	۳۰/۱۱
۴	DCTBI [104]-2015	مقارن استوانه ای	ML	MAP	مرزک دوگان	۳۱/۲۹	۲۹/۴۲	-
۵	ABNSCT [105]-2011	لاپلاسین غیر ایزوتروپیک	ML	MAP	تبدیل مرزک بدون نمونه برداری	۳۲/۶۷	۳۰/۵۵	-
۶	CT - BI - SaS [106]-2016	$\alpha$ -stable	گشتاوری-ML	MMSE	مرزک	۳۳/۰۶	۳۱/۶۵	۳۰/۹۵
۷	Shearlet-bishrink [107]-2010	تابع تبدیل معرفی شده در BiShrink	ML	MAP	قیچک	۳۱/۹۰	۳۱/۱۵	۳۰/۳۲
۸	BiGaussMixShrink [108]-2006	مخلوط گاوسی	EM	MAP	موجک مختلط	۳۱/۳۷	۲۸/۶۵	۲۹/۴۹
۹	BING [109]-2208	معکوس گاوسی	گشتاوری	MMSE	موجک مختلط	۳۱/۸۳	-	۳۰/۱۲
۱۰	UDTCWT [110]-2012	کوشی	تابع مشخصه	MAP	موجک مختلط غیرکاهشی	۳۰/۶۶	-	۲۹/۰۳
۱۱	MMSE-Trishrink-Radial [88]-2008	نمایی شعاعی	ML	MMSE	موجک	۳۰/۰۹	۲۸/۲۹	۲۸/۷۳
۱۲	THREE VARIATE [113]-2012	پیشنهادی	ML	MAP	موجک مختلط	۳۲/۳۶	۲۹/۹۷	۳۰/۰۱
۱۳	MGGD [114]-2005	گاوسی چند متغیره تعمیم یافته	DATA-FITTING	MAP	موجک مختلط	۳۲/۴۶	-	۳۰/۱۴
۱۴	ECDF [116]-2007	ECD	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MAP	موجک غیر کاهشی	۳۲/۴۳	۲۹/۶۸	۳۰/۲۷
۱۵	MNSST [118]-2013	تابع تبدیل معرفی شده	تجربی	MAP	تبدیل قیچک بدون نمونه برداری	۳۲/۹۳	۳۰/۰۲	-
۱۶	BLS-GSM [115]-2003	مخلوط وزنی گاوسی	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MMSE	هرم جهت دار	۳۲/۶۶	۳۰/۳۲	۳۰/۳۸
۱۷	OAGSM/NC [121]-2008	مخلوط وزنی گاوسی	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MMSE	هرم جهت دار	۳۲/۷۸	۳۰/۶۸	۳۰/۳۷
۱۸	CGSM [122]-2010	مخلوط وزنی گاوسی مختلط	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MMSE	موجک مختلط	۳۲/۴۰	۳۰/۲۵	۳۰/۱۳
۱۹	Gaussian-Hermite Scale Mixture [123]-2011	Gaussian-Hermite	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MMSE	هرم جهت دار	۳۱/۹۳	۲۹/۴۲	۲۹/۸۱
۲۰	NSCT-GSM [124]-2015	مخلوط وزنی گاوسی	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MMSE	تبدیل مرزک بدون نمونه برداری	۳۲/۱۸	۲۹/۶۶	-
۲۱	SV-BLS-GSM [128]-2007	مخلوط وزنی گاوسی	محاسبه ماتریس کواریانس نمونه ای	MMSE	هرم جهت دار	۳۲/۷۱	۳۰/۹۴	-



الگوریتم EM و گشتاوری تخمین زده شده اند در حوزه قیچک توسعه یافته ارائه شده که کاربرد خوبی در حفظ لبه ها دارد. در مرجع [۱۳۷] یک مدل HMT جدید که از مخلوط چگالی های نمایی یک طرفه استفاده می کند (جهت در نظر گرفتن علامت ضرایب تبدیل) در حوزه مرزک دوگان ارائه شده است. این روش که DCT-HMT نامیده شده است کارایی بسیار خوبی در کاهش نویز داشته و از بسیاری از روش ها از جمله BM3D [۹۷] بهتر عمل می کند.

در مرجع [۱۳۸, ۱۳۹] مدل HMM جدید با نام LCHMM<sup>۱</sup> که فرض می شود ضرایب موجک به صورت محلی توزیع های مخلوط گاوسی دارند. در واقع مدل HMT با داشتن ساختار درختی وابستگی های بین سطوح را مدل می کند اما در این روش وابستگی های محلی داخل زیرباندها را نیز در نظر می گیرد.

در مرجع [۱۴۰] مدل HMT در حوزه تبدیل LAPPED [۱۴۱] ارائه شده است که کارایی آن نسبت به روش HMT در حوزه موجک متعادلتر است. در مقاله ارائه شده در [۱۴۲] مدل HMT به جای هر زیرباند، در ترکیبی از بلوک هایی که از لحاظ محتوا شبیه هم هستند پیاده سازی شده است و کارایی آن از مدل CHMM<sup>۲</sup> [۱۴۳] که از پیکسل هایی که از نظر آماری شبیه هم هستند (اما از لحاظ مکانی مجاور هم نیستند) بهتر است.

در مرجع [۱۴۴] از مدل HMT برای تبدیل موجک مختلط استفاده شده است. در واقع در این مقاله تابع چگالی اندازه ضرایب موجک به صورت مخلوط رایلی در نظر گرفته شده اند. در مرجع [۱۴۵] مدل HMT که از مخلوط چگالی گاوسی و کوشی به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب استفاده می کند در حوزه NSCT [۴۷] ارائه شده است و کارایی آن از روشهای BLS-GSM [۱۱۵] و BM3D [۹۷] بهتر بوده است.

در مرجع [۱۴۶] مدل HMM برداری با در نظر گرفتن وابستگی های داخل هر زیر باند و همچنین وابستگی های بین سطوح و استفاده از معیار MMSE ارائه شده است. مرجع [۱۴۷] همین مدل را با معیار MAP به کار برده که با به دست آمدن فرم بسته جوابها بهبود یافته اند. جدول ۳ کارایی روشهای مبتنی بر مدل پنهان مارکوف برای تصاویر استاندارد BOAT, LENA و BARBARA برای انحراف معیار نویز  $\sigma_n = 20$  بر اساس معیار PSNR را نشان می دهد.

### ۳-۳ روش های مبتنی بر مدل کردن ضرایب تبدیل با استفاده از مدل های پنهان مارکوف

در مرجع [۵۵] یک ایده جدید برای پردازش آماری سیگنال بر اساس مدل پنهان مارکوف در حوزه تبدیل موجک ارائه شده است که وابستگی های آماری و غیر گاوسی بودن سیگنال را می تواند مدل کند. در واقع در این مدل چگالی احتمال حاشیه ای به صورت چگالی مخلوط با یک متغیر پنهان مدل می شود و می تواند خاصیت غیرگاوسی بودن تابع چگالی ضرایب را مدل کند. همچنین برای در نظر گرفتن وابستگی های بین ضرایب موجک وابستگی های مارکوفی بین متغیر های حالت پنهان توسط یک گراف یا درخت آماری مدل می شوند. مدل هایی از این نوع را مدل های پنهان مارکوف (HMM) می گویند.

مدل های HMT برای تصاویر ساختار درختی دارند که هر وضعیت ضریب موجک به چهار وضعیت ضریب موجک فرزند متصل است و تابع چگالی به صورت زیر تعریف شده است [۵۵]:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M p(s=m)p(\mathbf{x} | s=m) \quad (12)$$

که  $m$  نشان دهنده وضعیت و  $p(\mathbf{x} | s=m)$  توابع چگالی گاوسی می باشند. در این روش برای تخمین پارامترهای توابع گاوسی و همچنین  $p(s)$  ها از الگوریتم EM استفاده شده و برای کاهش نویز، تخمین بیزین تجربی به کار رفته است.

در مرجع [۱۳۱] از مدل پنهان مارکوف ضمنی<sup>۱</sup> برای مدل کردن ضرایب در حوزه مرزک استفاده شده است. در این روش که C-CHMM نامیده شده، جهت تخمین پارامترهای مدل مارکوف با استفاده از معیار اطلاعات متقابل<sup>۲</sup> از ضرایبی استفاده شده که همبستگی زیادی با ضریب مرجع دارد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که این روش از روش C-HMT<sup>۳</sup> [۱۳۲] بهتر عمل می کند. در مرجع [۱۳۳] از تبدیل قیچک توسعه یافته<sup>۴</sup> که تبدیلی چند جهتی و چند مقیاسی است استفاده شده و مدل HMT جهت تخمین ضرایب موجک استفاده شده است و پارامترهای مدل با الگوریتم EM تخمین زده شده اند. نتایج شبیه سازی بیانگر عملکرد بهتر این روش نسبت به روشهای BLS-GSM [۱۱۵]، W-HMT [۵۵]، C-HMT [۱۳۲]، B-HMT [۱۳۴]، C-CHMM [۱۳۱] است. در مرجع [۱۳۵] روش HMT در حوزه پیچک گسسته<sup>۵</sup> ارائه شده است.

در مرجع [۱۳۶] روش کاهش نویز با استفاده از ترکیب توزیع های HMT و BKF که پارامترهای آن از روش های

<sup>1</sup> Contourlet-Contextual Hidden Markov Model

<sup>2</sup> Mutual Information

<sup>3</sup> Contourlet- Hidden Markov Tree

<sup>4</sup> Extended-Shearlet

<sup>5</sup> Uniform Discrete Curvelet Transform

<sup>6</sup> Local Contextual Hidden Markov Model

<sup>7</sup> Contextual Hidden Markov Model

جدول ۳: مقایسه روشهای مبتنی بر مدل های پنهان مارکوف بر اساس معیار PSNR

ردیف	نام روش	تابع چگالی	روش تخمین پارامترهای تابع چگالی	حوزه تبدیل	LENA	BARBARA	BOAT
۱	HMT [55]-1998	مخلوط گاوسی	EM	موجک	۳۰/۴۰	۲۷/۸۰	۲۸/۸۱
۲	C-CHMM [131]-2009	مخلوط گاوسی	EM	مرزک	۳۰/۶۲	۲۸/۵۲	-
۳	ES-HMT [133]-2014	مخلوط گاوسی	EM	چیچک توسعه یافته	۳۱/۸۲	۲۹/۵۱	-
۴	UDCT-HMT [135]-2009	مخلوط گاوسی	EM	پیچک	۳۱/۴۳	۲۹/۷۹	-
۵	ES-HMT-BKF [136]-2016	BKF	گشتاوری-EM	چیچک توسعه یافته	۳۳/۱۴	۳۰/۵۱	۳۱/۶۸
۶	DCT-HMT [137]-2017	مخلوط نمایی و گاوسی	EM	مرزک دوگان	۳۳/۶۰	۳۲/۰۸	۳۱/۴۹
۷	LCHMM [138]-2001	مخلوط گاوسی محلی	EM	موجک	۳۱/۲۰	۲۹/۲۰	-
۸	HMM-MMSE [146]-2014	مخلوط گاوسی	EM	موجک	۳۲/۶۴	۳۰/۸۵	۲۹/۹۹
۹	HMM-MAP [147]-2015	مخلوط گاوسی	EM	موجک	۳۲/۸۴	۳۱/۰۱	۲۹/۹۸

### ۳-۴ تحلیل نتایج و بحث

سوی دیگر با افزایش تعداد پارامترهای تابع چگالی، تخمین پارامترها نیز دارای تقریب بیشتری خواهد بود. از روش های مناسب جهت تخمین پارامترها در این حوزه، الگوریتم EM است اما باید توجه داشت که استخراج فرم بسته جهت تخمین پارامترها، مسئله ای حائز اهمیت می باشد، زیرا در غیر این صورت الگوریتم زمان بر خواهد بود.

با مقایسه روشهای رفع نویز تک متغیره در جدول ۱، توابع چگالی مخلوط لاپلاس، مخلوط گاوسی و استیودنت تی کارایی خوبی دارند. در این جدول، با مقایسه روشهای ۲، ۳ و ۷ که به ترتیب با استفاده از تابع چگالی استیودنت تی، مخلوط گاوسی و مخلوط لاپلاس، فرایند کاهش نویز را انجام داده اند (سایر شرایط مانند حوزه تبدیل، نحوه تخمین پارامترها و نحوه تخمین ضرایب موجک یکسان می باشد) ملاحظه می گردد که در روشی که از تابع چگالی استیودنت تی استفاده شده است، برای سه تصویر استاندارد استفاده شده، دارای PSNR متوسط،  $30/38$  می باشد و تابع چگالی مخلوط گاوسی و مخلوط لاپلاس به ترتیب دارای PSNR های متوسط  $29,57$  و  $29,31$  می باشند. همانگونه که ملاحظه می شود تابع چگالی استیودنت تی دارای انطباق بهتری با هیستوگرام تجربی می باشد.

در جدول ۲، روشهای چند متغیره ارائه شده اند که در میان این روشها، توزیع های لاپلاس و مخلوط وزنی گاوسی و  $\alpha$ -stable

در این مقاله، مروری بر روشهای مبتنی بر مدل های آماری در حوزه تبدیل، جهت کاهش نویز گاوسی جمع شونده انجام شد. روش های ارائه شده در این حوزه را می توان از جنبه های مختلف مانند حوزه تبدیل اعمال شده، نوع تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب تبدیل بدون نویز، نحوه تخمین پارامترهای تابع چگالی و نحوه تخمین ضرایب بدون نویز تقسیم بندی و مقایسه کرد. در این مقاله، این روشها از لحاظ نوع تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب تبدیل بدون نویز تقسیم بندی شده اند. از آنجایی که هیستوگرام تجربی بسیاری از تصاویر طبیعی، نوک تیز و دنباله سنگین می باشد، در مقالات مرتبط در این زمینه، توابع چگالی نوک تیز و دنباله سنگین از قبیل توزیع های لاپلاس،  $\alpha$ -stable، کوشی، استیودنت تی، اسلش، BKF، معکوس گاوسی، گاوسی تعمیم یافته، مخلوط گاوسی، مخلوط لاپلاس، مخلوط وزنی گاوسی و مخلوط BKF به عنوان تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب تبدیل معرفی و استفاده شده اند. با توجه به اینکه برای کاهش نویز در این حوزه اغلب از معیارهای MAP و MMSE استفاده می شود، ارائه تابع چگالی که در تخمین ضرایب با استفاده از دو معیار فوق بتوان فرم بسته ای برای آن ارائه داد از چالش های این مبحث می باشد. چالش دیگر در خصوص استفاده از توابع چگالی احتمال پیشین ضرایب، تخمین پارامترهای این توابع می باشد. اگرچه هرچه تعداد پارامترهای توزیع ها افزایش یابد، امکان انطباق بهتر توابع چگالی با هیستوگرام تجربی وجود دارد اما از

مقایسه روش های ۷، ۸، ۱۰ و ۱۱ بیانگر نتایج مشابهی می باشد. همچنین مقایسه روشهای ۱۶ و ۱۸ در جدول ۲ بیانگر عملکرد بهتر تبدیل هرم جهتی که دارای PSNR متوسط ۳۱/۱۲ نسبت به موجک مختلط که دارای PSNR متوسط ۳۰/۹۲ است می باشد. مقایسه روشها ۱، ۲، ۳ و ۴ در جدول ۳ بیانگر عملکرد بهتر تبدیل قیچک توسعه یافته نسبت به تبدیل های موجک، مرزک و پیچک (سایر شرایط مانند تابع چگالی، نحوه تخمین پارامترها یکسان می باشد) در این دسته از مدل های آماری می باشد.

#### ۴ جمع بندی و مسیر آینده

کاهش نویز تصاویر در حوزه پردازش تصویر موضوعی است که بسیار مورد تحقیق و پژوهش قرار گرفته است. در این مقاله پس از معرفی کلی انواع روش های رفع نویز، مهمترین مدل های آماری از لحاظ نوع تابع چگالی احتمال پیشین ضرایب تبدیل بدون نویز تقسیم بندی و معرفی شده و نتایج تجربی جهت بیان مزایا و معایب این روش ها بحث و تحلیل شده اند. با توجه به نتایج تحقیقات و با توجه به اینکه در سال های اخیر تعداد مقالات کمی در خصوص معرفی تابع چگالی مناسبی در این حوزه ارائه شده است، ارائه توزیع جدیدی که در مقایسه با توزیع های استفاده شده، انطباق بهتری با هیستوگرام تجربی ضرایب تبدیل بدون نویز داشته باشد و همچنین ارائه یک روش مناسب برای تخمین پارامترهای آن از چالش های اساسی این حوزه می باشد. استفاده از توزیع های بهتر در روش های برداری مدل های پنهان مارکوف و همچنین استفاده از حوزه های تبدیل با پایه های افزونه در این روش ها و نیز ترکیب روشهای آماری با سایر روش های کاهش نویز، جهت بهبود نتایج را می توان به عنوان کارهای آینده مورد بررسی و تحقیق قرار داد.

#### مراجع

1. Shao, L., et al., *From heuristic optimization to dictionary learning: A review and comprehensive comparison of image denoising algorithms*. IEEE transactions on cybernetics, 2013. 44(7): p. 1001-1013.
2. Wang, J.-H., W.-J. Liu, and L.-D. Lin, *Histogram-based fuzzy filter for image restoration*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2002. 32(2): p. 230-238.
3. Hong, J.-H., S.-B. Cho, and U.-K. Cho, *A novel evolutionary approach to image enhancement filter design: method and applications*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2009. 39(6): p. 1446-1457.
4. Lee, C.-S., S.-M. Guo, and C.-Y. Hsu, *Genetic-based fuzzy image filter and its application to image processing*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2005. 35(4): p. 694-711.

نسبت به توابع تبدیل دیگر کارایی بهتری دارند. در میان روش های چند متغیره روش ۶ که از تابع چگالی  $\alpha$ -stable در حوزه تبدیل مرزک استفاده نموده دارای PSNR متوسط ۳۱,۸۸ می باشد که نسبت به سایر روشها کارایی بهتری دارد. همچنین با مقایسه روشهای ۱۶ و ۱۹ که به ترتیب با استفاده از تابع چگالی مخلوط وزنی گوسی و مخلوط وزنی گوسی-هرمیت، فرایند کاهش نویز را انجام داده اند (سایر شرایط مانند حوزه تبدیل به کار رفته، نحوه تخمین پارامترها و نحوه تخمین ضرایب تبدیل یکسان می باشد) ملاحظه می گردد که در روشی که از تابع چگالی وزنی گوسی استفاده شده است، برای سه تصویر استاندارد استفاده شده، دارای PSNR متوسط ۳۱/۱۲ می باشد و تابع چگالی مخلوط وزنی گوسی-هرمیت دارای PSNR متوسط ۳۰/۳۸ می باشد.

در روش های مبتنی بر مدل پنهان مارکوف، روش های برداری آن HMM-MMSE و HMM-MAP نسبت به روشهای تک متغیره آن عملکرد بهتری دارند. همچنین در این روشها، تابع چگالی مخلوط نمایی و گاوسی نسبت به مخلوط گاوسی کارایی را بهبود داده است.

بر اساس نتایج شبیه سازی در مقالات، در روش های تخمین پارامتر، تخمین پارامتر به صورت محلی (با استفاده از پنجره با اندازه مشخص) نسبت به تخمین پارامتر در هر زیر باند، به دلیل بهره گیری از وابستگی ضرایب تبدیل، نتایج بهتری حاصل شده است. مقایسه نتایج روشهای ۱ و ۲ در جدول ۲، که در روش ۲ تخمین پارامتر به جای هر زیرباند در یک پنجره اطراف ضریب مورد نظر به صورت محلی صورت گرفته (سایر شرایط مانند حوزه تبدیل، تابع چگالی به کار رفته و نحوه تخمین ضرایب تبدیل یکسان می باشد) و همچنین روشهای چند متغیره ۱۶ و ۲۱ در جدول ۲، که در روش ۲۱ ماتریس کواریانس به جای هر زیرباند با استفاده از پنجره همسایگی حول هر ضریب، به صورت محلی تخمین زده شده است (سایر شرایط مانند حوزه تبدیل، تابع چگالی به کار رفته و نحوه تخمین ضرایب تبدیل یکسان می باشد) بیانگر این موضوع می باشد.

همچنین در کلیه روشها، در میان حوزه های تبدیل، حوزه های تبدیل با پایه های افزونه، مانند موجک چهارگانه، موجک مختلط، هرم جهت دار، قیچک بدون نمونه برداری و قیچک توسعه یافته کارایی روشها را بهبود داده اند. با مقایسه روش های ۳، ۴، ۵ و ۶ در جدول ۱ که به ترتیب با استفاده از حوزه های تبدیل موجک، موجک مختلط، مرزک و پیچک، فرایند کاهش نویز را انجام داده اند (سایر شرایط مانند تابع چگالی، نحوه تخمین پارامترها و نحوه تخمین ضرایب، یکسان می باشد) ملاحظه می گردد که در روشی که از حوزه تبدیل موجک مختلط استفاده شده است، برای سه تصویر استاندارد استفاده شده، دارای PSNR متوسط ۳۰/۵۸ می باشد و حوزه های تبدیل پیچک، موجک و مرزک به ترتیب دارای PSNR های متوسط ۲۹,۷۶، ۲۹,۵۷ و ۲۸,۴۲ می باشد.

22. Thaipanich, T., et al., *Improved image denoising with adaptive nonlocal means (ANL-means) algorithm*. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2010. **56**(4): p. 2623–2630.
23. Wang, J., et al. *Fast non-local algorithm for image denoising*. in *2006 International Conference on Image Processing*. 2006. IEEE.
24. Zhang, L., et al. *An improved non-local means image denoising algorithm*. in *2017 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*. 2017. IEEE.
25. Pang, C., et al. *A fast NL-means method in image denoising based on the similarity of spatially sampled pixels*. in *2009 IEEE International Workshop on Multimedia Signal Processing*. 2009. IEEE.
26. Tschumperlé, D. and L. Brun. *Non-local image smoothing by applying anisotropic diffusion PDE's in the space of patches*. in *2009 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. 2009. IEEE.
27. Grewenig, S., S. Zimmer, and J. Weickert, *Rotationally invariant similarity measures for nonlocal image denoising*. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2011. **22**(2): p. 117–130.
28. Wei, J., *Lebesgue anisotropic image denoising*. International Journal of Imaging Systems and Technology, 2005. **15**(1): p. 64–73.
29. Kervrann, C. and J. Boulanger, *Local adaptivity to variable smoothness for exemplar-based image regularization and representation*. International Journal of Computer Vision, 2008. **79**(1): p. 45–69.
30. Lou, Y., et al. *Nonlocal similarity image filtering*. in *International Conference on Image Analysis and Processing*. 2009. Springer.
31. Zimmer, S., S. Didas, and J. Weickert. *A rotationally invariant block matching strategy improving image denoising with non-local means*. in *Proc. 2008 International Workshop on Local and Non-Local Approximation in Image Processing*. 2008.
32. Yan, R., et al., *Improved nonlocal means based on pre-classification and invariant block matching*. journal of display technology, 2012. **8**(4): p. 212–218.
33. Frosio, I. and J. Kautz, *Statistical nearest neighbors for image denoising*. IEEE Transactions on Image Processing, 2018. **28**(2): p. 723–738.
34. Takeda, H., S. Farsiu, and P. Milanfar, *Kernel regression for image processing and reconstruction*. IEEE Transactions on image processing, 2007. **16**(2): p. 349–366.
35. Zhang, K., et al. *Multi-scale dictionary for single image super-resolution*. in *2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2012. IEEE.
36. Yan, R., L. Shao, and Y. Liu, *Nonlocal hierarchical dictionary learning using wavelets for image denoising*. 5. Kumar, V. and A. Samadhiya, *Comparative performance analysis of image de-noising techniques*. arXiv preprint arXiv:1901.06529, 2019.
6. Mafi, M., et al., *A comprehensive survey on impulse and Gaussian denoising filters for digital images*. Signal Processing, 2019. **157**: p. 236–260.
7. Goyal, B., et al., *Image denoising review: From classical to state-of-the-art approaches*. Information Fusion, 2020. **55**: p. 220–244.
8. Amini, Z. and H. Rabbani, *Classification of medical image modeling methods: A review*. Current Medical Imaging Reviews, 2016. **12**(2): p. 130–148.
9. Shapiro, L.G. and G.C. Stockman, *Computer vision*. 2001: Prentice Hall.
10. Extrapolation, W.N., *Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New York: Wiley, 1949.
11. Haykin, S. and B. Widrow, *Least-mean-square adaptive filters*. Vol. 31. 2003: John Wiley & Sons.
12. Shao, L., H. Zhang, and G. De Haan, *An overview and performance evaluation of classification-based least squares trained filters*. IEEE Transactions on Image Processing, 2008. **17**(10): p. 1772–1782.
13. Tomasi, C. and R. Manduchi. *Bilateral filtering for gray and color images*. in *Sixth international conference on computer vision (IEEE Cat. No. 98CH36271)*. 1998. IEEE.
14. Kumar, B.S., *Image denoising based on gaussian/bilateral filter and its method noise thresholding*. Signal, Image and Video Processing, 2013. **7**(6): p. 1159–1172.
15. Chaudhury, K.N. and K. Rithwik. *Image denoising using optimally weighted bilateral filters: A sure and fast approach*. in *2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. 2015. IEEE.
16. Yang, G.-Z., et al. *Structure adaptive anisotropic filtering for magnetic resonance image enhancement*. in *International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns*. 1995. Springer.
17. Tsitsios, C. and M. Petrou, *On the choice of the parameters for anisotropic diffusion in image processing*. Pattern recognition, 2013. **46**(5): p. 1369–1381.
18. Xu, J., et al., *An improved anisotropic diffusion filter with semi-adaptive threshold for edge preservation*. Signal Processing, 2016. **119**: p. 80–91.
19. Mahmoudi, M. and G. Sapiro, *Fast image and video denoising via nonlocal means of similar neighborhoods*. IEEE signal processing letters, 2005. **12**(12): p. 839–842.
20. Buades, A., B. Coll, and J.-M. Morel. *A non-local algorithm for image denoising*. in *2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '05)*. 2005. IEEE.
21. Coupé, P., et al., *An optimized blockwise nonlocal means denoising filter for 3-D magnetic resonance images*. IEEE transactions on medical imaging, 2008. **27**(4): p. 425–441.



52. Freeman, W.T. and E.H. Adelson, *The design and use of steerable filters*. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1991(9): p. 891-906.
53. Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*. Vol. 61. 1992: Siam.
54. Vetterli, M. and J. Kovacevic, *Wavelets and subband coding*. 1995: Prentice-hall.
55. Crouse, M.S., R.D. Nowak, and R.G. Baraniuk, *Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models*. IEEE Transactions on signal processing, 1998. **46**(4): p. 886-902.
56. Donoho, D.L. and J.M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*. biometrika, 1994. **81**(3): p. 425-455.
57. Nasri, M. and H. Nezamabadi-pour, *Image denoising in the wavelet domain using a new adaptive thresholding function*. Neurocomputing, 2009. **72**(4-6): p. 1012-1025.
58. Chang, S.G., B. Yu, and M. Vetterli, *Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression*. IEEE transactions on image processing, 2000. **9**(9): p. 1532-1546.
59. Donoho, D.L. and I.M. Johnstone, *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*. Journal of the american statistical association, 1995. **90**(432): p. 1200-1224.
60. Chen, G., T.D. Bui, and A. Krzyzak, *Image denoising with neighbour dependency and customized wavelet and threshold*. Pattern recognition, 2005. **38**(1): p. 115-124.
61. Ma, Q.-m., X.-y. Wang, and S.-p. Du, *Method and application of wavelet shrinkage denoising based on genetic algorithm*. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A, 2006. **7**(3): p. 361-367.
62. Schulte, S., et al. *A new fuzzy-based wavelet shrinkage image denoising technique*. in *International Conference on Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*. 2006. Springer.
63. Shahdoosti, H.R. and Z. Rahemi, *Edge-preserving image denoising using a deep convolutional neural network*. Signal Processing, 2019. **159**: p. 20-32.
64. Sejdić, E., I. Djurović, and J. Jiang, *Time-frequency feature representation using energy concentration: An overview of recent advances*. Digital signal processing, 2009. **19**(1): p. 153-183.
65. POLIKAR, R., *The Wavelet Tutorial Second Edition Part I*. Available on: [www.google.com](http://www.google.com).
66. Starck, J.-L., D. Donoho, and M. Elad, *Redundant multiscale transforms and their application for morphological component separation*. 2004, CM-P00052061.
67. Selesnick, I.W., R.G. Baraniuk, and N.C. Kingsbury, *The dual-tree complex wavelet transform*. IEEE signal processing magazine, 2005. **22**(6): p. 123-151.
- IEEE transactions on image processing, 2013. **22**(12): p. 4689-4698.
37. Elad, M. and M. Aharon, *Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries*. IEEE Transactions on Image processing, 2006. **15**(12): p. 3736-3745.
38. Mairal, J., et al. *Non-local sparse models for image restoration*. in *2009 IEEE 12th international conference on computer vision*. 2009. IEEE.
39. Dong, W., et al. *Sparsity-based image denoising via dictionary learning and structural clustering*. in *CVPR 2011*. 2011. IEEE.
40. Peyré, G., *A review of adaptive image representations*. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2011. **5**(5): p. 896-911.
41. Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. AP Professional, Third Edition, London, 2009.
42. Kamble, V.M., et al., *Performance evaluation of wavelet, ridgelet, curvelet and contourlet transforms based techniques for digital image denoising*. Artificial Intelligence Review, 2016. **45**(4): p. 509-533.
43. Candes, E.J. and D.L. Donoho, *Recovering edges in ill-posed inverse problems: Optimality of curvelet frames*. Annals of statistics, 2002: p. 784-842.
44. Candès, E.J. and D.L. Donoho, *Curvelets and curvilinear integrals*. Journal of Approximation Theory, 2001. **113**(1): p. 59-90.
45. Panigrahi, S.K., S. Gupta, and P.K. Sahu, *Curvelet-based multiscale denoising using non-local means & guided image filter*. IET Image Processing, 2018. **12**(6): p. 909-918.
46. Do, M.N. and M. Vetterli, *Framing pyramids*. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003. **51**(9): p. 2329-2342.
47. Da Cunha, A.L., J. Zhou, and M.N. Do, *The nonsubsampling contourlet transform: theory, design, and applications*. IEEE transactions on image processing, 2006. **15**(10): p. 3089-3101.
48. Donoho, D.L., *Wedgelets: Nearly minimax estimation of edges*. The Annals of Statistics, 1999. **27**(3): p. 859-897.
49. Le Pennec, E. and S. Mallat, *Sparse geometric image representations with bandelets*. IEEE transactions on image processing, 2005. **14**(4): p. 423-438.
50. Le Pennec, E. and S. Mallat, *Bandelet image approximation and compression*. Multiscale Modeling & Simulation, 2005. **4**(3): p. 992-1039.
51. Shahdoosti, H.R. and S.M. Hazavei, *A new compressive sensing based image denoising method using block-matching and sparse representations over learned dictionaries*. Multimedia Tools and Applications, 2019. **78**(9): p. 12561-12582.

82. Dempster, A.P., N.M. Laird, and D.B. Rubin, *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 1977. **39**(1): p. 1-22.
83. Fadili, J.M. and L. Boubchir, *Analytical form for a Bayesian wavelet estimator of images using the Bessel K form densities*. IEEE Transactions on Image Processing, 2005. **14**(2): p. 231-240.
84. Rabbani, H., et al. *Image denoising employing a bivariate cauchy distribution with local variance in complex wavelet domain*. in *2006 IEEE 12th Digital Signal Processing Workshop & 4th IEEE Signal Processing Education Workshop*. 2006. IEEE.
85. Rabbani, H. and M. Vafadust, *Image/video denoising based on a mixture of Laplace distributions with local parameters in multidimensional complex wavelet domain*. Signal Processing, 2008. **88**(1): p. 158-173.
86. Saeedzarandi, M., H. Nezamabadi-pour, and S. Saryazdi, *Statistical Wavelet-based Image Denoising using Scale Mixture of Normal Distributions with Adaptive Parameter Estimation*. Journal of AI and Data Mining, 2020.
87. Saeedzarandi, M., H. Nezamabadi-pour, and A. Jamalizadeh, *Dual-Tree Complex Wavelet Coefficient Magnitude Modeling Using Scale Mixtures of Rayleigh Distribution for Image Denoising*. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019: p. 1-26.
88. Kittisuwan, P. and W. Asdornwised. *A closed form solution of MMSE using multivariate radial-exponential priors for wavelet-based image denoising*. in *2008 9th International Conference on Signal Processing*. 2008. IEEE.
89. Simoncelli, E.P. and E.H. Adelson. *Noise removal via Bayesian wavelet coring*. in *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing*. 1996. IEEE.
90. Mihcak, M.K., et al., *Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients*. IEEE Signal Processing Letters, 1999. **6**(12): p. 300-303.
91. Deng, G. *Generalized wiener estimation algorithms based on a family of heavy-tail distributions*. in *IEEE International Conference on Image Processing 2005*. 2005. IEEE.
92. Rabbani, H., M. Vafadoost, and I. Selesnick. *Wavelet based image denoising with a mixture of Gaussian distributions with local parameters*. in *Proceedings ELMAR 2006*. 2006. IEEE.
93. Rabbani, H., M. Vafadust, and S. Gazor. *Image denoising based on a mixture of Laplace distributions with local parameters in complex wavelet domain*. in *2006 International Conference on Image Processing*. 2006. IEEE.
68. Hill, P.R., et al., *Undecimated dual-tree complex wavelet transforms*. Signal Processing: Image Communication, 2015. **35**: p. 61-70.
69. Simoncelli, E.P. and W.T. Freeman. *The steerable pyramid: A flexible architecture for multi-scale derivative computation*. in *Proceedings, International Conference on Image Processing*. 1995. IEEE.
70. Candès, E.J. and D.L. Donoho, *Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency?* Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1999. **357**(1760): p. 2495-2509.
71. Donoho, D.L. and M.R. Duncan. *Digital curvelet transform: strategy, implementation, and experiments*. in *Wavelet applications VII*. 2000. International Society for Optics and Photonics.
72. Candès, E.J. and D.L. Donoho, *New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C2 singularities*. Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 2004. **57**(2): p. 219-266.
73. Candes, E., et al., *Fast discrete curvelet transforms*. Multiscale Modeling & Simulation, 2006. **5**(3): p. 861-899.
74. Do, M.N. and M. Vetterli, *The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation*. IEEE Transactions on image processing, 2005. **14**(12): p. 2091-2106.
75. Lyu, Z., C. Zhang, and M. Han, *A nonsubsampling countourlet transform based CNN for real image denoising*. Signal Processing: Image Communication, 2020. **82**: p. 115727.
76. Yi, S., et al., *A shearlet approach to edge analysis and detection*. IEEE Transactions on Image Processing, 2009. **18**(5): p. 929-941.
77. Dahlke, S. and G. Teschke, *The continuous shearlet transform in higher dimensions: variations of a theme*. 2009: Citeseer.
78. Bayro-Corrochano, E., *The theory and use of the quaternion wavelet transform*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006. **24**(1): p. 19-35.
79. Simoncelli, E.P. *Statistical models for images: Compression, restoration and synthesis*. in *Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat. No. 97CB36136)*. 1997. IEEE.
80. Goossens, B., A. Pižurica, and W. Philips, *Image denoising using mixtures of projected Gaussian scale mixtures*. IEEE Transactions on Image Processing, 2009. **18**(8): p. 1689-1702.
81. Simoncelli, E.P., *Bayesian denoising of visual images in the wavelet domain*, in *Bayesian inference in wavelet-based models*. 1999, Springer. p. 291-308.



108. Rabbani, H., et al. *Image denoising based on a mixture of bivariate gaussian models in complex wavelet domain*. in *2006 3rd IEEE/EMBS International Summer School on Medical Devices and Biosensors*. 2006. IEEE.
109. Forouzanfar, M., H.A. Moghaddam, and S. Ghadimi, *Locally adaptive multiscale Bayesian method for image denoising based on bivariate normal inverse Gaussian distributions*. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2008. **6**(04): p. 653-664.
110. Hill, P., A. Achim, and D. Bull. *The undecimated dual tree complex wavelet transform and its application to bivariate image denoising using a cauchy model*. in *2012 19th IEEE International Conference on Image Processing*. 2012. IEEE.
111. Hill, P.R., et al., *Dual-tree complex wavelet coefficient magnitude modelling using the bivariate Cauchy-Rayleigh distribution for image denoising*. *Signal Processing*, 2014. **105**: p. 464-472.
112. Achim, A. and E.E. Kuruoglu, *Image denoising using bivariate  $\alpha$ -stable distributions in the complex wavelet domain*. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004. **12**(1): p. 17-20.
113. Chen, G., W.-P. Zhu, and W. Xie, *Wavelet-based image denoising using three scales of dependency*. *IET image processing*, 2012. **6**(6): p. 756-760.
114. Cho, D. and T.D. Bui, *Multivariate statistical modeling for image denoising using wavelet transforms*. *Signal Processing: Image Communication*, 2005. **20**(1): p. 77-89.
115. Portilla, J., et al., *Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain*. *IEEE Transactions on Image processing*, 2003. **12**(11): p. 1338-1351.
116. Tan, S. and L. Jiao, *Multivariate statistical models for image denoising in the wavelet domain*. *International Journal of Computer Vision*, 2007. **75**(2): p. 209-230.
117. Starck, J.-L., J. Fadili, and F. Murtagh, *The undecimated wavelet decomposition and its reconstruction*. *IEEE transactions on image processing*, 2007. **16**(2): p. 297-309.
118. Gao, G., *Image denoising by non-subsampled shearlet domain multivariate model and its method noise thresholding*. *Optik*, 2013. **124**(22): p. 5756-5760.
119. Sadreazami, H., M.O. Ahmad, and M.S. Swamy. *Image denoising utilizing the scale-dependency in the contourlet domain*. in *2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. 2015. IEEE.
120. Zhou, Y. and J. Wang, *Image denoising based on the symmetric normal inverse Gaussian model and non-subsampled contourlet transform*. *IET Image Processing*, 2012. **6**(8): p. 1136-1147.
121. Hammond, D.K. and E.P. Simoncelli, *Image modeling and denoising with orientation-adapted Gaussian scale*
94. Zhang, X. and X. Jing, *Image denoising in contourlet domain based on a normal inverse Gaussian prior*. *Digital Signal Processing*, 2010. **20**(5): p. 1439-1446.
95. Rabbani, H., *Image denoising in steerable pyramid domain based on a local Laplace prior*. *Pattern Recognition*, 2009. **42**(9): p. 2181-2193.
96. Gai, S. and L. Luo, *Image denoising using normal inverse gaussian model in quaternion wavelet domain*. *Multimedia Tools and Applications*, 2015. **74**(3): p. 1107-1124.
97. Dabov, K., et al. *Image denoising with block-matching and 3D filtering*. in *Image Processing: Algorithms and Systems, Neural Networks, and Machine Learning*. 2006. International Society for Optics and Photonics.
98. Liu, Y.-X., Y. Yang, and N.-F. Law. *Accurate Prior Modeling in the Locally Adaptive Window-Based Wavelet Denoising*. in *International Conference on Intelligent Computing*. 2016. Springer.
99. Rabbani, H. and S. Gazor, *Image denoising employing local mixture models in sparse domains*. *IET Image Processing*, 2010. **4**(5): p. 413-428.
100. Candes, E.J. and D.L. Donoho, *Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges*. 2000, Stanford Univ Ca Dept of Statistics.
101. Rabbani, H., M. Vafadust, and S. Gazor. *Image denoising in Curvelet transform domain using Gaussian mixture model with local parameters for distribution of noise-free coefficients*. in *2007 4th IEEE/EMBS International Summer School and Symposium on Medical Devices and Biosensors*. 2007. IEEE.
102. Sendur, L. and I.W. Selesnick, *Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency*. *IEEE Transactions on signal processing*, 2002. **50**(11): p. 2744-2756.
103. Sendur, L. and I.W. Selesnick, *Bivariate shrinkage with local variance estimation*. *IEEE signal processing letters*, 2002. **9**(12): p. 438-441.
104. Min, D., Z. Jiuwen, and M. Yide, *Image denoising via bivariate shrinkage function based on a new structure of dual contourlet transform*. *Signal Processing*, 2015. **109**: p. 25-37.
105. Jia, J. and L. Chen. *Using anisotropic bivariate threshold function for image denoising in NSCT domain*. in *International Conference on Intelligent Science and Intelligent Data Engineering*. 2011. Springer.
106. Sadreazami, H., M.O. Ahmad, and M. Swamy, *A study on image denoising in contourlet domain using the alpha-stable family of distributions*. *Signal Processing*, 2016. **128**: p. 459-473.
107. Cao, H., W. Tian, and C. Deng. *Shearlet-based image denoising using bivariate model*. in *2010 IEEE International Conference on Progress in Informatics and Computing*. 2010. IEEE.

135. Rakvongthai, Y. and S. Oraintara. *Statistics and dependency analysis of the uniform discrete curvelet coefficients and hidden markov tree modeling*. in *2009 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 2009. IEEE.
136. Wang, X.-Y., et al., *Extended shearlet HMT model-based image denoising using BKF distribution*. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2016. **54**(3): p. 301–319.
137. Shahdoosti, H.R. and S.M. Hazavei, *Image denoising in dual contourlet domain using hidden Markov tree models*. *Digital Signal Processing*, 2017. **67**: p. 17–29.
138. Fan, G. and X.-G. Xia, *Image denoising using a local contextual hidden Markov model in the wavelet domain*. *IEEE signal processing letters*, 2001. **8**(5): p. 125–128.
139. Fan, G. and X.-G. Xia. *Wavelet-based image denoising using hidden Markov models*. in *Proceedings 2000 International Conference on Image Processing (Cat. No. 00CH37101)*. 2000. IEEE.
140. Duval, L. and T.Q. Nguyen. *Lapped transform domain denoising using hidden markov trees*. in *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing (Cat. No. 03CH37429)*. 2003. IEEE.
141. Malvar, H.S., *Signal processing with lapped transforms*. 1992: Artech House.
142. Liao, Z., C. Lam, and Y.Y. Tang. *Image processing using template model and wavelet domain hidden markov model*. in *Proceedings of 2004 International Conference on Machine Learning and Cybernetics (IEEE Cat. No. 04EX826)*. 2004. IEEE.
143. Crouse, M.S. and R.G. Baraniuk. *Contextual hidden Markov models for wavelet-domain signal processing*. in *Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat. No. 97CB36136)*. 1997. IEEE.
144. Choi, H., et al. *Hidden Markov tree modeling of complex wavelet transforms*. in *2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No. 00CH37100)*. 2000. IEEE.
145. Wang, X., et al., *The NSCT-HMT model of remote sensing image based on Gaussian-Cauchy mixture distribution*. *IEEE Access*, 2018. **6**: p. 66007–66019.
146. Amini, M., M.O. Ahmad, and M. Swamy. *Image denoising in wavelet domain using the vector-based hidden Markov model*. in *2014 IEEE 12th International New Circuits and Systems Conference (NEWCAS)*. 2014. IEEE.
147. Amini, M., M.O. Ahmad, and M.S. Swamy. *A new map estimator for wavelet domain image denoising using vector-based hidden Markov model*. in *2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. 2015. IEEE.
122. Rakvongthai, Y., A.P. Vo, and S. Oraintara, *Complex Gaussian scale mixtures of complex wavelet coefficients*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010. **58**(7): p. 3545–3556.
123. Wang, X.-Y., et al., *Image denoising using Gaussian scale mixtures with Gaussian-Hermite PDF in steerable pyramid domain*. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011. **39**(3): p. 245–258.
124. Yan, C., K. Zhang, and Y. Qi. *Image denoising using modified nonsubsampling Contourlet transform combined with Gaussian scale mixtures model*. in *International Conference on Intelligent Science and Big Data Engineering*. 2015. Springer.
125. Vo, A.P., T.T. Nguyen, and S. Oraintara. *Image denoising using shiftable directional pyramid and scale mixtures of complex Gaussians*. in *2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 2007. IEEE.
126. Nguyen, T.T. and S. Oraintara, *The shiftable complex directional pyramid—Part I: Theoretical aspects*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008. **56**(10): p. 4651–4660.
127. Nguyen, T.T. and S. Oraintara, *The shiftable complex directional pyramid—Part II: Implementation and applications*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008. **56**(10): p. 4661–4672.
128. Guerrero-Colón, J.A., L. Mancera, and J. Portilla, *Image restoration using space-variant Gaussian scale mixtures in overcomplete pyramids*. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007. **17**(1): p. 27–41.
129. Miller, M. and N. Kingsbury, *Image denoising using derotated complex wavelet coefficients*. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008. **17**(9): p. 1500–1511.
130. Guerrero-Colón, J.A., E.P. Simoncelli, and J. Portilla. *Image denoising using mixtures of Gaussian scale mixtures*. in *2008 15th IEEE International Conference on Image Processing*. 2008. IEEE.
131. Long, Z. and N.H. Younan, *Statistical image modeling in the contourlet domain using contextual hidden Markov models*. *Signal Processing*, 2009. **89**(5): p. 946–951.
132. Po, D.-Y. and M.N. Do, *Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform*. *IEEE Transactions on image processing*, 2006. **15**(6): p. 1610–1620.
133. Wang, X.-Y., Y.-C. Liu, and H.-Y. Yang, *Image denoising in extended Shearlet domain using hidden Markov tree models*. *Digital Signal Processing*, 2014. **30**: p. 101–113.
134. Zhang, W., et al., *Image denoising using Bandelets and hidden Markov tree models*. *Chinese Journal of Electronics*, 2010. **19**(4): p. 646–650.



**منصوره صعید زرندی** مدرک کارشناسی خود را در رشته مهندسی برق مخابرات از دانشگاه شهید باهنر کرمان و مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشته مهندسی برق مخابرات از دانشگاه تربیت مدرس اخذ کرد. وی هم‌اکنون دانشجوی دکتری مهندسی برق-مخابرات در دانشگاه شهید باهنر کرمان می‌باشد زمینه‌های مورد علاقه ایشان پردازش تصویر و پردازش سیگنال است.



**حسین نظام آبادی پور** تحصیلات خود را در دوره ی کارشناسی مهندسی برق-الکترونیک در دانشگاه شهید باهنر کرمان در سال ۱۳۷۷ و در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی برق-الکترونیک در دانشگاه تربیت مدرس به ترتیب در سالهای ۱۳۷۹ و ۱۳۸۳ به پایان رسانده است. وی هم اکنون استاد بخش مهندسی برق دانشگاه شهید باهنر کرمان است. زمینه های پژوهشی مورد علاقه او پردازش تصویر، بازشناسی الگو، کاربرد رایانش نرم در پردازش تصویر و روش‌های بهینه‌سازی ابتکاری است.



**سعید سریزدی** مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشته برق مخابرات در سال ۱۳۶۶ از دانشگاه صنعتی اصفهان و مدارک DEA و دکتری در رشته پردازش سیگنال و پردازش تصویر را از دانشگاه Rennes فرانسه به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۳ و ۱۳۷۶ دریافت کرد. وی هم‌اکنون استاد بازنشسته بخش مهندسی برق دانشگاه شهید باهنر کرمان است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه او پردازش تصویر و بازشناسی الگو است.



**احد جمالیزاده** مدرک کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری خود را در رشته آمار از دانشگاه شیراز دریافت نمود. وی هم‌اکنون استاد بخش آمار دانشگاه شهید باهنر کرمان است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه او نظریه توزیع‌ها، مدل‌های آمیخته، بازشناسی الگو و آماره‌های ترتیبی از متغیرهای وابسته است.