مجله ماشین‌بینایی و پردازش‌تصویر
سال پنجم، شماره اول، تابستان ۱۳۹۷

روشی جدید برای نویزگیری و لبه‌یابی تصاویر با استفاده از توابع هار گویا شده

پریسا نورس[۱] و ناصر آقازاده[۲]

چکیده

هدف اصلی این مقاله ارائه‌ی یک روش جدید برای نویزگیری و لبه‌یابی تصاویر است. ایده‌ی اصلی این روش استفاده از توابع هار گویا شده است. تا به حال، این توابع برای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل استفاده می‌شدند. اما در این مقاله از این توابع برای نویزگیری و لبه‌یابی تصاویر استفاده شده است. در این روش علاوه بر این که اختلاف تصاویر نویزگیری شده با تصاویر اصلی کمتر می‌شود، شباهت ساختاری تصاویر نویزگیری شده و تصاویر اصلی نیز بیشتر از روش‌های دیگر حفظ می‌شود. نتایج تجربی، دقت روش مورد نظر را در نویزگیری و لبه‌یابی نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها

توابع هار گویا شده، نویزگیری، لبه‌یابی.

۱ مقدمه

هر تصویر را می‌توان یک آرایه‌ی دوبعدی از مقادیر شدت روشنایی بین ۰ و ۲۵۵ در نظر گرفت. اولین مرحله در بسیاری از روش‌های پردازش تصویر از جمله پردازش تصاویر راداری و پردازش تصاویر پزشکی، نویزگیری از تصاویر است، چون معمولا این تصاویر همواره دارای نویز هستند و بدون حذف نویز امکان استخراج اطلاعات کافی و دقیق از تصاویر وجود ندارد. نویز یک سیگنال تصادفی است که موجب از بین رفتن بخشی از اطلاعات تصویر می‌شود و ممکن است به دلیل وجود یک منبع نویز در اطراف تصویر، عدم دقت کافی لنز دوربین و آشفتگی‌های جوی و ... باشد.

نویزهایی که در تصاویر وجود دارند، اغلب نویز سفید[1]، نویز فلفل نمکی، نویز گاوسی و یا ترکیبی از آن‌هاست [۱]. الگوریتم‌های بسیاری برای حذف نویز از تصاویر وجود دارد [۲]، البته باید توجه داشت که الگوریتم حذف نویز متناسب با نوع نویز به کار رفته است. استفاده از فیلتر گاوسی از اولین روش‌های همسانگرد حذف نویز است [۳]، اما این روش‌ها برای حذف نویز در بخش‌های هموار تصویر مناسب است و موقع حذف نویز اغلب موجب ماتی لبه‌ها[2] و ساختار تصویر می‌شود. برای اجتناب از اثر ماتی عمل نویزگیری بر روی لبه‌ها، از فیلترهای ناهمسانگرد استفاده شد [۴]. با استفاده از فیلترهای ناهمسانگرد[3] اگرچه لبه‌های راست به خوبی بازیابی می‌شوند اما مناطق مسطح و بافت تصویر از بین می‌رود. در سال‌های اخیر از موجک‌ها[4] برای حذف نویز تصاویر استفاده شده است [۵]. با وجود اینکه DWT [5] یک ابزار قوی برای تحلیل ریاضی و پردازش سیگنال است اما ایراد آن این است که

این مقاله در مردادماه سال ۱۳۹۵ دریافت، در فروردین‌ماه ۱۳۹۶ بازنگری و در تیرماه همان سال پذیرفته شد.

[۱] آزمایشگاه پردازش تصویر، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان.
رایانامه: p.noras@azaruniv.ac.ir
[۲] آزمایشگاه پردازش تصویر، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان.
رایانامه: aghazadeh@azaruniv.ac.ir

نویسنده مسئول: ناصر آقازاده

[1] White noise
[2] Edges
[3] Anisotropic
[4] Wavelets
[5] Discrete Wavelet Transform

فاقد اطلاعات جهتی است و همین امر موجب کاهش کارایی آن در بسیاری از کاربردها شده است. تبدیل موجک مختلط انتخاب جهت را برای موجک‌ها فراهم کرد، اما تبدیل موجک مختلط به طور گسترده استفاده نمی‌شود زیرا طراحی موجک‌های مختلط که دارای ویژگی‌های فیلتر مناسب و بازسازی کامل باشند دشوار است. تبدیل موجک دوبعدی که با استفاده از ضرب تانسور موجک‌های یک‌بعدی ساخته می‌شود تا حدودی مشکل جهت را در موجک‌ها حل کرد اما هنوز محدودیت‌هایی دارد زیرا نمی‌توانند اطلاعات موجود در تمامی جهت‌ها را مشخص کند. در سال ۱۹۹۹، تبدیل موجک ناهمسانگرد هندسی به نام ریدجلت[1] توسط کانداس[2] و دونوهو[3] پیشنهاد شده است. تبدیل ریدجلت در نمایش دادن تکینی‌های خط راست[4] بهینه است. متاسفانه تکینی‌های خط راست در کاربردهای واقعی به ندرت مشاهده می‌شوند. برای تحلیل تکینی‌های منحنی‌وار تبدیل پیچک[5] در سال ۲۰۰۰ توسط کاندس و دونوهو پیشنهاد شد که بهتر از روش‌های قبلی حذف نویز عمل کرده است [۶]. در این مقاله از یک روش جدید مبتنی بر توابع هار گویا شده[6] استفاده شده است که در عین اینکه ساده‌تر ساده‌تر از موجک‌ها و کرولت‌ها است بلکه در حفظ بافت و ساختار تصویر بهتر از این روش‌ها عمل می‌کند.

لبه‌ها در یک تصویر تکینی‌های موضعی (ناپیوستگی‌های جهشی در مقادیر شدت روشنایی) هستند. تشخیص لبه‌های یک تصویر نیز مانند نویزگیری یک گام مهم در تحلیل بسیاری از اطلاعات تصویر است. اگر لبه‌های یک تصویر به طور دقیق مشخص شوند، همه‌ی اشیای موجود در تصویر نیز مشخص می‌شوند. بنابراین، لبه‌یاب‌های زیادی برای مشخص کردن لبه‌های تصویر به وجود آمده‌اند. برخی از آن‌ها مانند لبه‌یاب سوبل[7]، روبرت[8] و پرویت[9] [۷] لبه‌های تصویر را از طریق پیچش[10] با یک یک ماتریس (ماسک گرادیان موضعی) مشخص می‌کنند [۸]. با وجود این لبه‌یاب کنی[11] که بر اساس فضای مقیاس است [۹]، نقاطی را جستجو می‌کند که گرادیان تصویر در آن نقاط بیشینه‌ی موضعی دارد. لبه‌یاب کنی سریع و قابل اعتماد است، اما تعیین σ مناسب در این لبه‌یاب، یک نقطه‌ی ضعف برای این لبه‌یاب است. علاوه بر این، موجک‌ها که در دهه‌های اخیر برای لبه‌یابی استفاده شده‌اند [۱۰، ۱۱]، بهتر از لبه‌یاب‌های قبلی هستند زیرا نمایش چندمقیاسی را فراهم می‌کنند [۱۲، ۱۳، ۱۴]. در این مقاله، ما توابعی را برای نویزگیری و لبه‌یابی استفاده کرده‌ایم که نتایج بهتری نسبت به موجک‌ها و کرولت‌ها دارند، این توابع، توابع هار گویا شده هستند.

توابع هار گویا شده توسط M. Ohkita برای غلبه بر ایرادهای توابع هار در محاسبات معرفی شدند. ایراد توابع هار این بود که در محاسبات، شامل اعداد اصم مانند $\pm\sqrt{2^p}, p=1,2,\dots$ بودند. توابع هار گویا شده که توابعی متعامد هستند و فقط شامل اعداد گویا هستند، تا به حال برای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل استفاده شده‌اند [۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱]. علاوه بر این در [۲۲]، Park نشان داد که توابع هار گویا شده یک تجزیه‌ی بهینه را ایجاد می‌کنند. در این مقاله، ما یک کاربرد جدید از این توابع را معرفی کرده‌ایم. ما از توابع هار گویا شده برای نویزگیری و لبه‌یابی تصاویر استفاده کرده‌ایم. تفاوت توابع هار گویا شده با موجک‌ها در این است که توابع هار گویا شده همزمان شامل موجک‌هایی در چند مقیاس مختلف هستند و این باعث شده است که ما قادر باشیم بدون نیاز به عمل کاهش نمونه‌ها، لبه‌های موجود در چند مقیاس را به طور همزمان به دست آوریم. همچنین نتایج تجربی ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهد که این توابع در نویزگیری نیز عملکرد بهتری نسبت به روش موجک‌ها و سایر روش‌های موجود دارند. علاوه بر این، برخلاف لبه‌یاب کنی، مقدار آستانه‌گیری بهینه[12] به طور خودکار با استفاده از الگوریتم پیشرفته‌ی اتسو[13] [۲۳] محاسبه شده است. نتایج روش پیشنهادی این مقاله بر روی تصاویر پزشکی و تصاویر بینایی ماشین آورده شده است. این نتایج دقت روش پیشنهادی این مقاله را در مقایسه با لبه‌یاب‌های پرویت و کنی و موجک‌ها نشان می‌دهد.

این مقاله شامل بخش‌های زیر است. یک معرفی مختصر درباره‌ی توابع هار گویا شده در بخش ۲ آورده شده است. چون توابع هار گویا شده مشابه موجک‌ها هستند، بنابراین در بخش ۳ دستگاه موجک‌ها توضیح داده شده است. در بخش ۴ برتری توابع هار گویا شده نسبت به موجک‌هایی که تاکنون استفاده شده است بیان شده است. در بخش ۵ نتایج نویزگیری با توابع هار گویا شده در مقایسه با موجک‌ها آورده شده است. در بخش ۶ روش لبه‌یابی با توابع هار گویا شده و نتایج آن آورده شده است. در بخش ۷ نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲ توابع هار گویا شده

در اینجا یک تعریف برای توابع هار گویا شده را از [۲۱] می‌آوریم.

تعریف ۱. توابع هار گویا شده $RH(r,t),\ r=1,2,3,\dots$، از سه مقدار ۱، ۱- و ۰ تشکیل یافته‌اند و در بازه‌ی $[0,1)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

1 Ridgelet
2 Candes
3 Donoho
4 Straight-Line singularities
5 Curvelet transform
6 Rationalized Haar Functions (RHFs)
7 Sobel
8 Roberts
9 Prewitt
10 Convolution
11 Canny
12 optimum thresholding value
13 Otsu

$$RH(r,t)=\begin{cases}1 & j_1 \le t < j_{\frac{1}{2}}\\ -1 & j_{\frac{1}{2}} \le t < j_0\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (۱)$$

که $j_u = \frac{j-u}{2^i}$ و $u = 0,\frac{1}{2},1$. برای تولید مجموعه‌ی S با $m = 2^k$ تابع هار گویا شده به صورت

$$S = \{(RH(0,t), RH(1,t),\dots, RH(m-1,t))\} \qquad (۲)$$

که k یک عدد صحیح مثبت است. باید i و j در روابط $0 \le i \le \log_2^m$ و $j = 1,2,3,\dots,2^i$ صدق کنند و مقدار r با استفاده از i و j به صورت زیر به دست می‌آید

$$r = 2^i + j - 1. \qquad (۳)$$

همچنین $RH(0,t)$ برای $i = j = 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$RH(0,t) = 1; \quad 0 \le t < 1. \qquad (۴)$$

۳ دستگاه موجک‌ها

دستگاه موجک‌ها از یک تابع مقیاس ϕ و یک تابع موجک ψ تشکیل شده است که تابع مقیاس در شرایط آنالیز تجزیه‌ی چندگانه[1] صدق می‌کند مانند دستگاه موجک‌های دابیشز[2]، میر[3]، سیملت[4] و ... [۲۴]. به عنوان مثال، دستگاه موجک هار به صورت زیر است [۲۴]:

$$\phi(t)=\begin{cases}1 & 0 \le t < 1\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (۵)$$

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & 0 \le t \le \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases} \qquad (۶)$$

در هرمقیاس، $j \in Z$ روابط زیر برای تابع مقیاس و موجک به ازای یک $n \in N$ برقرار است.

$$\phi(2^j t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\sqrt{2}\phi(2^{j+1}t-k)$$
$$\psi(2^j t) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\sqrt{2}\phi(2^{j+1}t-k) \qquad (۷)$$

که h و g به ترتیب فیلتر پایین‌گذر[5] و فیلتر بالاگذر[6] متناظر با تابع مقیاس $\phi(t)$ و $\psi(t)$ گفته می‌شود. به طور مثال به ازای $j = 0$ داریم

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\sqrt{2}\phi(2t-k)$$
$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)\sqrt{2}\phi(2t-k) \qquad (۸)$$

۳-۱ تبدیل موجک[7]

تبدیل موجک، پیچش یک سیگنال (تابع) با برخی از توابع پایه (تابع مقیاس و تابع موجک) است [۲۴]. اگر $\psi(t)$ تابع موجک باشد، آنگاه تبدیل موجک پیوسته‌ی سیگنال $f(x)$ متناظر با این موجک در مقیاس a به صورت زیر است:

(۹)

$$W_a f(x) = f * \psi = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\psi^{(\frac{t-x}{a})}dt,\ a > 0,$$

که تابع $*$ عمل پیچش را نشان می‌دهد.

چون هر تصویر خاکستری یک سیگنال دوبعدی است، بنابراین در پردازش تصاویر دیجیتال، می‌توان از نوع گسسته و دوبعدی (۹) استفاده کرد. اگر ϕ و ψ تابع موجک باشد، آنگاه با استفاده از ضرب تانسور ϕ و ψ، یک تابع مقیاس و ۳ تابع موجک دوبعدی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\phi(x,y) = \phi(x)\otimes\phi(y)$$
$$\psi^{(1)}(x,y) = \phi(x)\otimes\psi(y)$$
$$\psi^{(2)}(x,y) = \psi(x)\otimes\phi(y) \qquad (۱۰)$$
$$\psi^{(3)}(x,y) = \psi(x)\otimes\psi(y)$$

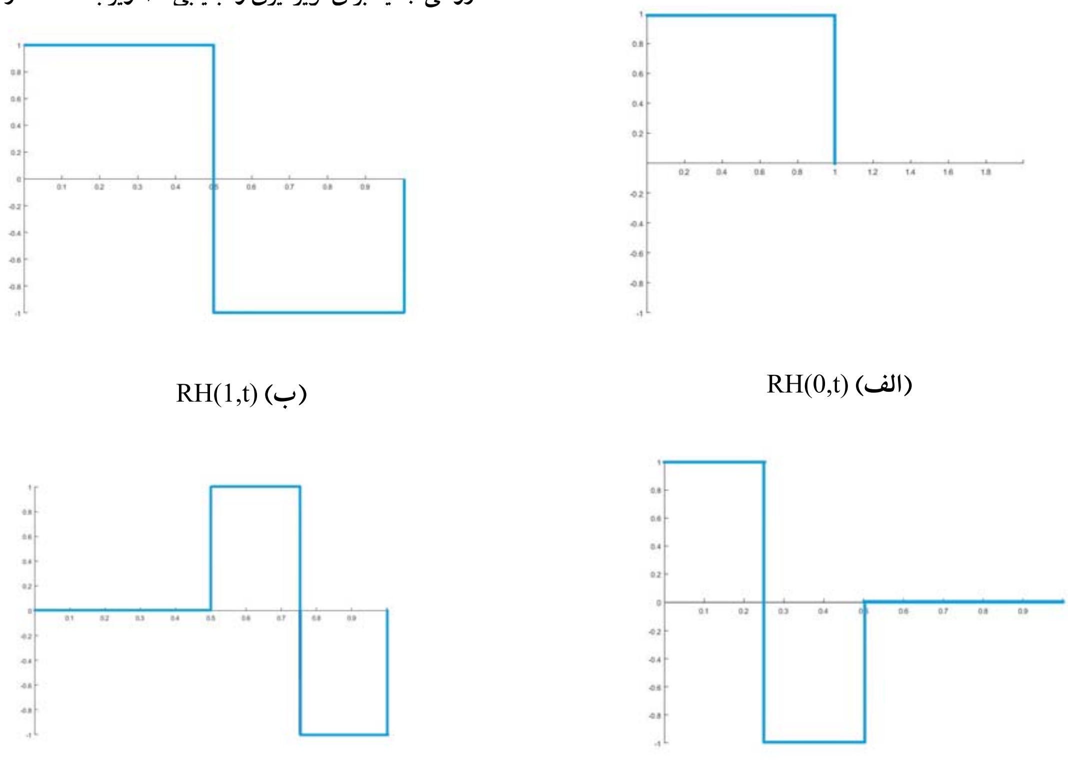
برای یافتن تبدیل موجک یک تصویر، تصویر با هرکدام از این تابع مقیاس و توابع موجک دوبعدی پیچش داده می‌شود. به عنوان مثال، برای یافتن تبدیل موجک حاصل از پیچش با $\psi^{(1)}(x,y) = \phi(x)\psi(y)$، ابتدا سطرهای تصویر با فیلتر پایین‌گذر متناظر با ϕ پیچش داده می‌شود و سپس ستون‌های تصویر حاصل با فیلتر بالاگذر متناظر با ψ پیچش داده می‌شود.

۴ برتری توابع هار گویا شده نسبت به موجک‌های دیگر

در مجموعه‌ی S در رابطه ....، اولین تابع $RH(0,t)$ تابع مقیاس گفته می‌شود. این تابع برای کامل کردن این مجموعه است. تابع دوم $RH(1,t)$ تابع موجک مادر است. بقیه‌ی عضوهای این مجموعه، به وسیله‌ی انتقال[8] و اتساع[9] تابع موجک مادر $RH(1,t)$ به وجود آمده‌اند. به ازای $m = 4$ چهار تابع هار گویا شده تولید می‌شود که در شکل ۱ نشان داده شده است.

[1] Multiresolution Analysis(MRA)
[2] Daubechies
[3] Meyer
[4] Symlet
[5] Lowpass filter
[6] Highpass filter

[7] wavelet transform
[8] Translation
[9] Dilation



RH(0,t) (الف)

RH(1,t) (ب)

RH(2,t) (ج)

RH(3,t) (د)

شکل ۱: توابع هار گویا شده به ازای m=4

توجه کنید که به ازای $m=2^k$ مجموعه‌ی S یک مجموعه‌ی متعامد کامل در $L^2(0,1)$ است. بنابراین، می‌توانیم از این مجموعه برای تقریب توابع دوبعدی مانند تصاویر که در $L^2(0,1)$ قرار داشته باشند استفاده کنیم. بنابراین، اگر مقادیر شدت روشنایی تصویر را که در بازه‌ی $[0,255]$ قرار دارد به بازه‌ی $[0,1]$ متناظر کنیم، می‌توانیم تصویر را با استفاده از این مجموعه تقریب بزنیم.

اگر در مجموعه‌ی S به ازای $m=4$ قرار دهیم:

$$\begin{aligned}\phi(t)&=RH(0,t)\\ \psi_1(t)&=RH(1,t)\\ \psi_2(t)&=RH(2,t)\\ \psi_3(t)&=RH(3,t),\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

و مشابه دستگاه موجک در (۸) قرار دهیم:

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\sum_{k=0}^{3}h(k)\sqrt{2}\phi(4t-k)\\ \psi_i(t))&=\sum_{k=0}^{3}g_i(k)\sqrt{2}\phi(4t-k)\quad i=1,2,3.\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

آنگاه با جایگذاری مقادیر تابع $\phi(t)$ و $\psi_i(t), i=1,2,3$ در نقاط $t=0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1$ می‌توان $h(k)$ و $g_i(k), i=1,2,3$ را به دست آورد و به رابطه‌ی زیر که در فرم ماتریسی آورده شده است، دست یافت.

$$\begin{bmatrix}\phi(t)\\ \psi_{(1)}(t)\\ \psi_{(2)}(t)\\ \psi_{(3)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi(4t)\\ \phi(4t-1)\\ \phi(4t-2)\\ \phi(4t-3)\end{bmatrix}. \qquad (۱۳)$$

توجه کنید که در اینجا به جای عامل مقیاس ۲، عامل مقیاس ۴ در نظر گرفته شده است. اگر قرار دهیم:

$$Q=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

آنگاه می‌توان سطر اول Q را به عنوان فیلتر پایین‌گذر (فیلتر متناظر با تابع مقیاس ϕ) و بقیه‌ی سطرها را به عنوان فیلترهای بالاگذر (فیلترهای متناظر با موجک‌های ψ_1,ψ_2,ψ_3) به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}h&=[1\quad 1\quad 1\quad 1]\\ g_1&=[1\quad 1\quad -1\quad -1]\\ g_2&=[1\quad -1\quad 0\quad 0]\\ g_3&=[0\quad 0\quad 1\quad -1].\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

توجه کنید که در کارهای مربوط به پردازش تصویر مانند لبه‌یابی با موجک‌ها، در هر مقیاس می‌توان اطلاعات مربوط به مقیاس‌های دیگر را نیز می‌توان با استفاده از ویژگی آنالیز تجزیه‌ی چندگانه به دست آورد اما این کار همراه با عمل کاهش نمونه‌ها است که اطلاعات را به طور مطلوب نشان نمی‌دهد [۲۴]. گر به طور دقیق به شکل ... نگاه کنید می‌بینید که به ازای $m=4$ تابع

$RH(0,t)$ تابع مقیاس هار است و $RH(1,t)$ تابع موجک هار است و $RH(2,t)$ و $RH(3,t)$ انتقال‌ها و اتساع‌های تابع موجک هار $RH(1,t)$ هستند. بنابراین، با استفاده از این توابع هار گویا شده می‌توان از موجک هار در دو مقیاس استفاده کرد (بدون نیاز به عمل کاهش نمونه‌ها). در حالت کلی، وقتی به ازای $m=2^k$ مجموعه‌ی S را مورد استفاده قرار می‌دهیم، از موجک هار در مقیاس $1,2,\ldots,k$ استفاده می‌کنیم. بنابراین، برخلاف موجک‌ها، اطلاعات مربوط به چندین مقیاس را به طور همزمان می‌توان از تصویر استخراج کرد. همچنین همان برتری توابع هار گویا شده نسبت به موجک هار در حل معادلات انتگرال، در اینجا نیز حفظ شده است و فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر این توابع فاقد عددگنگ $\sqrt{2}$ در محاسبات است.

تبدیل موجک به وسیله‌ی موجک‌های دوبعدی تولید شده توسط ϕ و ψ_k که $k=1,2,\ldots,m-1$، انجام می‌شود. بنابراین، در یافتن تبدیل موجک تصویر f با استفاده از توابع هار گویا شده به ازای $m=4$ که یک تابع مقیاس و سه تابع موجک دارد، ۱۶ زیرتصویر به صورت جدول ۱ خواهیم داشت.

جدول ۱: زیرتصویرهای ایجاد شده به ازای **m=4**

LL	LH_1	LH_2	LH_3
H_1L	H_1H_1	H_1H_2	H_1H_3
H_2L	H_2H_1	H_2H_2	H_2H_3
H_3L	H_3H_1	H_3H_2	H_3H_3

به عنوان مثال، زیرتصویر LH_2 متناظر با

$$f*\psi_2 = f*\left(\phi(x)\otimes\psi_2(y)\right),$$

به این معنی است که ابتدا تصویر با h (فیلتر پایین‌گذر متناظر با ϕ) پیچش داده می‌شود و سپس با ترانهاده‌ی g_2 (فیلتر بالاگذر متناظر با ψ_2) پیچش داده می‌شود. چون توابع هار گویا شده در $L^2(0,1)$ کامل هستند، می‌توان تصویر اصلی را با استفاده از تبدیل موجک وارون [1] [۲۴] روی این زیرتصویرها و سپس جمع تصاویر حاصل دست آورد.

۵ نویزگیری با استفاده از توابع هار گویا شده

در اینجا، از توابع هار گویا شده به ازای $m=4$ و روش *wavelet shrinkage* که توسط دونوهو در سال ۱۹۹۴ برای آستانه‌گذاری ضرایب موجک معرفی شده بود برای نویزگیری استفاده شده است [۲۵]. فرض کرده‌ایم که نویز اضافه شده نویز سفید باشد و همچنین برای ضرایب موجود در زیرتصویرها از آستانه‌گیری سخت استفاده شده است.

تعریف ۲. آستانه‌گیری سخت با پارامتر δ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$c_{hard}(k)=\begin{cases} c(k) & |c(k)|>\delta \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (۱۶)$$

که $c(k)$ ها ضرایب موجکی هستند که در هرکدام از زیرتصویرها به دست آمده‌اند. مقدار آستانه‌گیری δ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta=\sqrt{2\hat{\sigma}_{mad}^2\log(N)}. \quad (۱۷)$$

که $N=m\times n$ اندازه‌ی تصویر است و $\hat{\sigma}_{mad}$ انحراف مطلق میانه است که به صورت زیر است:

$$\hat{\sigma}_{mad}=\frac{median\{(|c(k)|: k=1,2,\ldots,N)\}}{0.6745} \quad (۱۸)$$

پس از آستانه‌گیری ضرایب زیرتصویرها، تصویر اصلی با استفاده از ضرایب جایگزین در زیرتصویرها و سپس تبدیل موجک وارون روی هرکدام به دست می‌آید.

کیفیت تصویر نویزگیری شده با استفاده از MSE و $PSNR$ اندازه‌گیری می‌شود [۲۴]:

$$MSE=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(f_{i,j}-\hat{f}_{i,j}\right)^2 \quad (۱۹)$$

$$PSNR=10\log_{10}\left(\frac{255^2}{MSE}\right), \quad (۲۰)$$

که $f_{i,j}$ تصویر اصلی و $\hat{f}_{i,j}$ تقریب به دست آمده است. MSE کمتر و $PSNR$ بیشتر نشان‌دهنده‌ی خطای کمتر تقریب به دست آمده است. جدول‌های ۲ و ۳ نتایج نویزگیری را برای دو تصویر house و brain در مقایسه با موجک دابشیز مرتبه‌ی چهار $(db4)$ و کرولت‌ها نشان می‌دهد. همچنین مقدار SNR [2] (نسبت سیگنال به نویز) [۲۴] نیز برای تصاویر نویزدار محاسبه شده و در جدول آورده شده است. توجه کنید که در اینجا نویز اضافه شده، نویز سفید با توزیع یکنواخت است [۲۶]، که یک تابع هم اندازه‌ی تصویر است که به صورت زیر است:

$$E=\sigma\times\sqrt{3}\times\left(2\times randn(m,n)-1\right), \quad (۲۱)$$

که در آن، $randn(m,n)$ یک ماتریس از اعداد تصادفی با توزیع نرمال است و σ میزان انحراف را نشان می‌دهد.

همچنین برای مقایسه‌ی شباهت ساختاری بین دو تصویر نویزگیری شده و تصویر اصلی از شاخص $SSIM$ استفاده شده است که در مرجع [۲۷] به صورت زیر تعریف شده است:

$$SSIM(X,Y)=\frac{\left(2\mu_x\mu_y+c_1\right)\left(2\sigma_{xy}+c_2\right)}{\left(\mu_x^2+\mu_y^2+c_1\right)\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+c_2\right)} \quad (۲۲)$$

که نتایج $SSIM$ مربوط به روش‌های $RHFs$ و $db4$ و کرولت برای دو تصویر *house* و *brain* در جدول‌های ۴ و ۵

[1] IDWT

[2] Signal-to-Noise Ratio

آمده است. این جدول‌ها نشان می‌دهد که در نویزهای بالا نیز شباهت ساختاری تصویر نویزگیری شده با $RHFs$ بیشتر از دو روش موجک دابشیز مرتبه‌ی ۴ و کرولت‌ها است. برای مقایسه‌ی بهتر روش پیشنهادی مان با روش‌های کرولت و موجک دابشیز مرتبه‌ی ۴، نتایج $PSNR$ و $SSIM$ تصاویر نویزدار با میزان $\sigma = 30$ برای تصاویری که در مقاله‌های مربوط به این روش‌ها بوده است نیز در جدول‌های ۶ و ۷ آورده شده است. این تصاویر در شکل ۲ دیده می‌شود.

شکل ۳ دو تصویر نویزدار و شکل ۴ تصاویر نویزگیری شده را با استفاده از RHFs و db4 و کرولت‌ها نشان می‌دهد. همانطور که در شکل۴ دیده می‌شود با استفاده از توابع هار گویا شده تصاویر بهتر نویزگیری شده‌اند.

۶ لبه‌یابی با استفاده از توابع هار گویا شده

اگر I تصویر مورد نظر باشد آنگاه لبه‌های تصویر با استفاده از $RHFs$ به ازای $m=4$ به صورت زیر به دست می‌آید:

۱. تصویر I را فراخوانی کنید.

۲. قرار دهید:

(۲۳)
$$P = \sqrt{(LH_1)^2 + (LH_2)^2 + (LH_3)^2 + (H_1L)^2 + (H_2L)^2 + (H_3L)^2}$$

که $H_iL, i=1,2,3$ و $LH_i, i=1,2,3$ مان زیرتصویرها در جدول ۱ هستند. توجه کنید که مشابه تبدیل موجک در [۲۸] که به جای ۴ زیرتصویر فقط از دو زیرتصویر که حاوی اطلاعات با فرکانس بالا بودند استفاده شده است، در اینجا نیز به جای ۱۶ زیرتصویر فقط از ۶ زیرتصویر استفاده شده است. توجه کنید که از زیرتصویر LL به این دلیل استفاده نشده است که این زیرتصویر حاوی اطلاعات با فرکانس پایین است و اصولا شامل نقاط لبه‌ای نیست. از زیرتصویرهای $H_iH_j, i, j=1,2,3$ به این دلیل استفاده نشده است که این زیرتصویرها به خاطر اینکه حاوی اطلاعات با فرکانس خیلی بالا هستند ممکن است در وجود نویز موجب تخریب لبه‌های به دست آمده شود.

۳. قرار دهید:

$$P_t = th(P) \qquad (۲۴)$$

که $th(P)$ مقدار بهینه‌ی آستانه‌گیری است که با روش اتسوی پیشرفته به دست می‌آید [۲۹]. توجه کنید که در روش اتسو به جای عملگر سوبل از P استفاده می‌شود که در مرحله‌ی ۲ به دست آمده است.

۴. قرار دهید:

$$G = \begin{cases} 1 & P > P_t \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad (۲۵)$$

سرانجام، G لبه‌های تصویر را نشان می‌دهد.

شکل‌های ۵، ۶ و ۷ لبه‌های برخی از تصاویر را که با استفاده از روش RHFs و کنی و پرویت و موجک‌ها محاسبه شده است نشان می‌دهد. این شکل‌ها نشان می‌دهد که روش پیشنهادی (استفاده از $RHFs$) در لبه‌یابی خطوط، منحنی‌ها و رگ‌ها بسیار دقیق است. توجه کنید که در این شکل ها در رابطه با نتایج موجک‌ها از موجک هار استفاده شده است و همچنین نتایج روش کنی و پرویت با مقدار آستانه‌گیری پیش فرض نشان داده شده است.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله از مجموعه‌ی توابع هار گویا شده به ازای $m=4$ برای نویزگیری و لبه‌یابی تصاویر استفاده شده است. نتایج با استفاده از نرم افزار متلب ۲۰۱۵ محاسبه شده است که دقت روش پیشنهادی بر اساس توابع هار گویا شده را نسبت به لبه‌یاب‌های دیگر نشان می‌دهد. همچنین در نویزگیری تصاویر نویزدار نیز نتایج بهتری نسبت به موجک‌ها و کرولت‌ها دارند و نسبت به نویز حساسیت کم‌تری دارند. علاوه براین آنچه به وضوح در جدول‌های مربوط به $SSIM$ مربوط به تصاویر دیده می‌شود این است که روش پیشنهادی ما در این مقاله، شباهت ساختاری را در نویزگیری تصاویر بیشتر حفظ می‌کند. با افزایش $m=2^k$ در توابع هار گویا شده می‌توان از موجک‌های بیشتری که در مقیاس‌های مختلف قرار دارند استفاده کرد تا لبه‌های بیشتری را تشخیص داد ولی هرگاه نویز تصاویر زیاد باشد بهتر است که از مقادیر کوچک $m=2^k$ استفاده کرد، زیرا ممکن است با شمول موجک‌های با فرکانس بالا، نویزها موجب تخریب نتایج شوند.

مراجع

[1] A. K. Boyat and B. K. Joshi, *A Review Paper: Noise Models in: Digital Image Processing*, Signal & Image Processing : An International Journal (SIPIJ), 6(2) (2015).

[2] J. Patil and S. Jadhav, *A Comparative Study of Image Denoising Techniques,* International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, 2(3) (2013).

[3] M. Wang and etal, *A new image denoising method based on Gaussian filter*, Electronics and Electrical Engineering (ISEEE), International Conference on Information Science, (2014) 163-167.

[4] R. Harrabim, E. Ben Braiek, *Isotropic and anisotropic filtering techniques for image denoising: A comparative study with classification,* 16th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference , (2012) 370 - 374.

[5] A. K. Boyat, and B. K. Joshi, *Image Denoising using Wavelet Transform and Median Filtering*, IEEE Nirma University International Conference on Engineering, (2013).

[18] M. Razzaghi and Y. Ordokhani, *Solution of Nonlinear Volterra-Hammerstein Integral Equations via Rationalized Haar Functions*, Mathematical Problems in Engineering 7 (2001) 205-219.

[19] J-H. Park, *Transfer Function Approximation via Rationalized Haar Transform in Frequency Domain*, International Journal of Control and Automation 7(4) (2014) 247-258.

[20] A. Alipanah, *Numerical Solution to Differential Equations via Hybrid of Block-pulse and Rationalized Haar Functions*, Math. Reports 13(63) (2011) 117-126.

[21] Y. Ordokhani, *Numerical Solution of Nonlinear Volterra-Hammerstein Integral Equations Using the Hybrid of Block-pulse and Rationalized Haar Functions*, Applied Mathematics Sciences 2(51) (2008) 2531-2541.

[22] J-H. Park, *Advanced Orthogonal Transform Algorithm for Optimal Analysis and Design of Nonlinear Distributed Parameter Systems*, International Journal of Innovative Research in Technology & Science 2(2) 118-123.

[23] J.K. Mandal and A. Ghosh, *Edge Detection by Modied Otsu Method*, Computer Science Information Technology 3(6) (2013) 233-240.

[24] K.P. Soman, K.I. Ramachandran and N. G. Resmi, *Insight into wavelets: From Theory to Practice*, PHI Learning Private Limited, New Dehli, 2010.

[25] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, *Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage*, 1994.

[26] P.C. Hansen, J.G. Nagy and D.P. O'Leary, *Debluring Images, Matrices, Spectra and Filtering*, SIAM, Philadelphia, 2006.

[27] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, E. P. Simoncelli, *I mage quality assessment: from error visibility to structural similarity*, IEEE Transactions on Image Processing, 13(4) (2004) 600-612

[28] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing,* 2nd edition, Prentice-Hall, 2002.

[29] J. K. Mandal and A. Ghosh, *Edge Detection by Modified Otsu Method*, Computer Science & Information Technology 3(6) (2013) 233-240.

[6] J-L. Starck, J. Candès Emmanuel , and David L. Donoho, \it {The Curvelet Transform for Image Denoising}, IEEE Transcations on Image Processing, 11(6), (2002).

[7] G.T. Shrivakshan, Dr. C. Chandrasekar, *A Comparison of various Edge Detection Techniques used in Image Processing*, IJCSI International Journal of Computer Science Issues, 9(1) (2012).

[8] Li. Bin, M.S. yeganeh, *Comparison for Image Edge Detection Algorithms*, IOSR Journal of Computer Engineering (IOSRJCE), 2(6) (2012) 01-04.

[9] J. Canny, *A Computational Approach to Edge Detection}. {IEEE Transcations on Pattern Anal. and Machine Intelligence,* 8(6) (1986) 679-697.

[10] N. Aghazadeh and Y. Gholizade Atani, *Edge Detection with Hessian Matrix Property Based on Wavelet Transform*, Journal of Science; Islamic Repoblic of Iran 26(2) (2015) 163-170.

[11] Z. Zhang et al, *An Edge Detection Approach Based on Directional Wavelet Transform*, Computers and Mathematics with Applications 57(8) (2009) 1265-1271.

[12] G. Lopez-Molina, M. Galar, H. Bustince and B. De Baeets, *on The Impact of Anisotropic Diffusion on Edge Detection*, Pattern Recognition, 47(1) (2014) 270-281.

[13] P. G. Nes, *Fast Multiscale Edge Detectionin in Medical Ultrasound Signals*, Signal Processing 92 (2012) 2394-2408.

[14] G. G. Bhutad, R.S. Anand and S.C. Saxena, *Edge Preserved Image Enhancement Using Adaptive Fusion of Images Denoised by Wavelet and Curvelet Transform*, Digital signal Processing, 21 (2011) 118-130.

[15] F. Mirzaee, *The RHFs for Solution of Nonlinear Fredholm Integro-differential Equations*, Applied Mathematical Science, 5(70) (2011) 3453-3464.

[16] F. Mirzaee, *Numerical Computational Solution of the Linear Volterra Integral Equations system via Rationalized Haar Functions*, Journal of King Saud University (Science), 22 (2010) 265-268.

[17] J-H. Park and R-D. Oh, *Transform of characteristic Equation Using Fast Rationalized Haar functions*, Advanced Science and Technology Letters 58 (2014) 71-74.

جدول ۲: مقادیر PSNR و MSE برای تصویر house

		RHFs		Wavelet(db4)		Curvelet	
deviation	SNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR
σ=۱۰	۳۰,۱۹۳۴	۳۵,۶۶۰۰	۳۲,۶۰۹۰	۲۵۵,۱۱۹۲	۲۴,۰۶۳۴	۳۴,۵۸۹۲	۳۲,۷۴۱۵
σ=۲۰	۲۴,۰۵۱۱	۵۶,۹۳۳۴	۳۰,۵۷۷۱	۲۸۶,۳۷۱۱	۲۳,۵۶۱۵	۳۱,۶۸۰۵	۳۳,۱۲۲۹
σ=۳۰	۲۱,۵۵۵۷	۱۰۶,۲۸۲۳	۲۷,۸۶۶۲	۳۱۵,۶۰۱۹	۲۳,۱۳۹۴	۲۹,۰۲۳۵	۳۳,۵۰۳۳

جدول ۳: مقادیر PSNR و MSE برای تصویر brain

		RHFs		Wavelet(db4)		Curvelet	
deviation	SNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR	MSE	PSNR
σ=۱۰	۱۸,۵۲۲۳	۳۱۴,۴۴۰۴	۲۳,۱۵۵۴	۱۲۱۷,۹۰۰۰	۱۷,۲۹۹۶	۵۵۳,۷۱۵۰	۲۰,۶۹۷۹
σ=۲۰	۱۲,۹۴۷۲	۳۳۱,۳۸۰۱	۲۲,۹۲۷۵	۱۲۷۰,۴۰۰۰	۱۷,۰۹۱۵	۶۴۶,۰۵۲۴	۲۰,۵۲۸۱
σ=۳۰	۱۰,۴۹۳۹	۳۵۲,۶۲۵۱	۲۲,۶۵۷۷	۱۲۹۶,۸۰۰۰	۱۷,۰۰۲۱	۵۹۰,۹۷۵۸	۲۰,۴۱۵۱

جدول ٤: مقادیر SSIM برای تصویر house

deviation	RHFs	Wavelet(db4)	Curvelet
σ=۱۰	۰,۵۵۱۶	۰,۲۹۲۰	۰,۳۹۶۹
σ=۲۰	۰,۵۱۳۵	۰,۲۶۳۵	۰,۳۶۸۰
σ=۳۰	۰,۴۷۰۴	۰,۲۳۰۳	۰,۳۶۸۰

جدول ۵: مقادیر SSIM برای تصویر brain

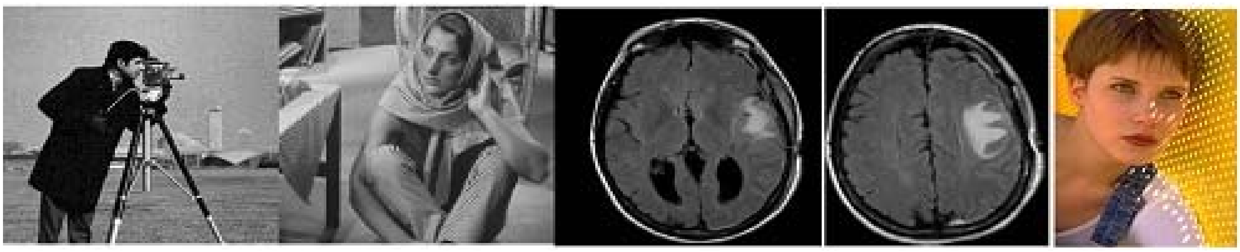
deviation	RHFs	Wavelet(db4)	Curvelet
σ=۱۰	۰,۲۷۴۹	۰,۱۲۹۴	۰,۲۶۷۵
σ=۲۰	۰,۲۶۵۱	۰,۱۲۲۷	۰,۲۵۸۲
σ=۳۰	۰,۲۵۷۰	۰,۱۱۵۶	۰,۲۴۹۹

جدول ۶: مقادیر PSNR برای تصویر طبیعی و پزشکی

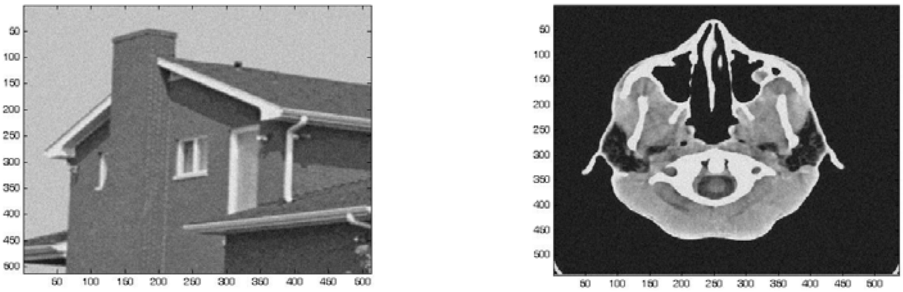
Image	RHFs	Wavelet(db4)	Curvelet
cameraman	۲۷,۸۴۶۹	۱۸,۹۳۱۲	۲۲,۹۷۸۷
barbara	۲۲,۴۴۱۳	۱۸,۶۲۹۹	۲۴,۲۴۲۰
mri1	۳۰,۰۳۷۱	۲۲,۹۱۵۴	۲۸,۴۷۱۵
mri2	۲۴,۷۵۱۸	۲۳,۱۴۳۱	۲۰,۳۵۶۷
woman	۲۵,۰۶۳۵	۱۶,۸۳۸۹	۲۱,۳۷۳۱

جدول ۷: مقادیر SSIM برای تصویر طبیعی و پزشکی

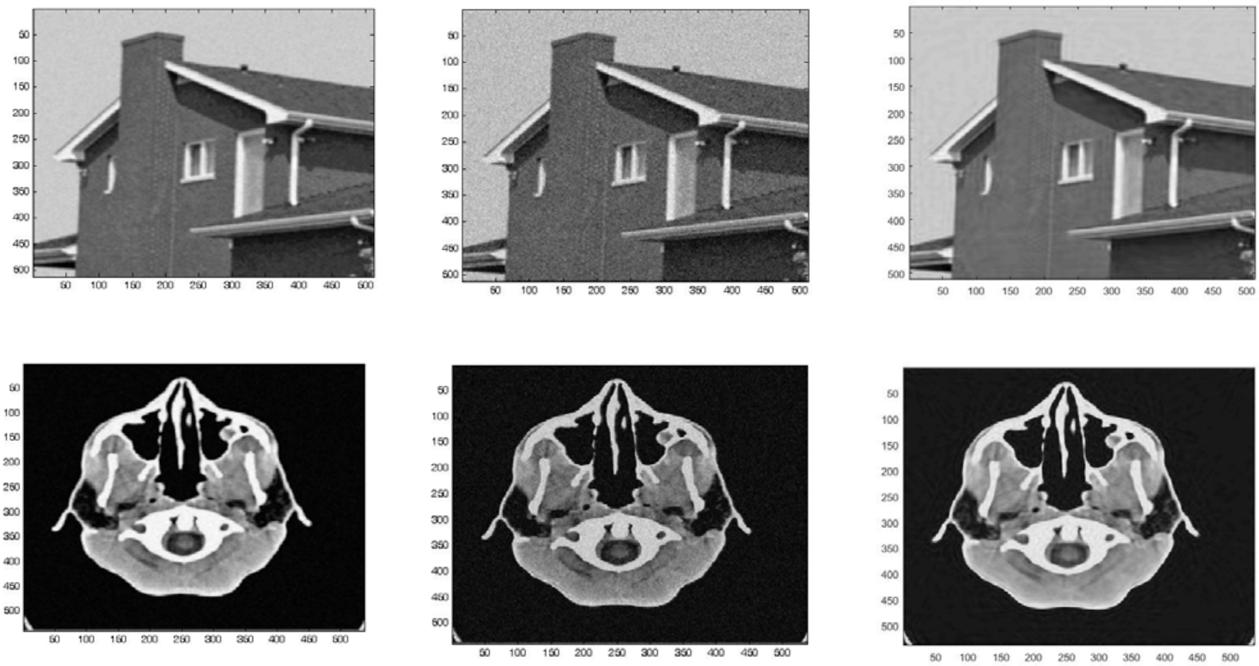
Image	RHFs	Wavelet(db4)	Curvelet
cameraman	۰,۴۳۱۸	۰,۱۵۱۸	۰,۳۵۸۸
barbara	۰,۴۲۷۰	۰,۰۷۶۵	۰,۵۲۲۴
mri1	۰,۴۱۵۲	۰,۲۰۱۴	۰,۳۸۲۳
mri2	۰,۵۱۲۹	۰,۲۷۹۴	۰,۴۷۰۵
woman	۰,۵۳۲۳	۰,۱۲۶۷	۰,۵۲۲۲



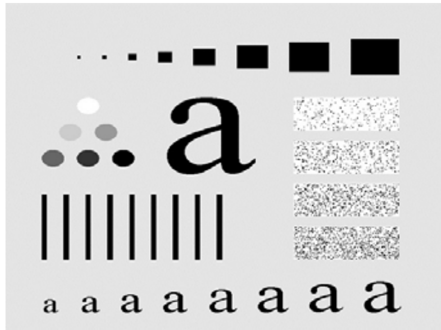
شکل ۲: تصاویر طبیعی و پزشکی استفاده شده در جدول‌های ۶ و ۷



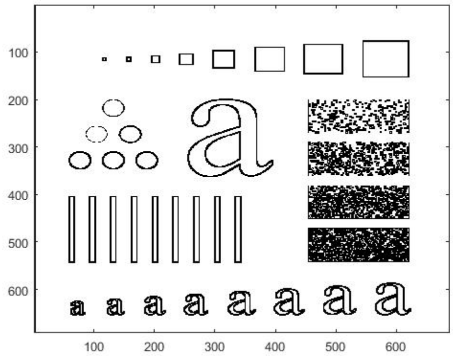
شکل ۳:تصاویر نویزدار با نویز سفید



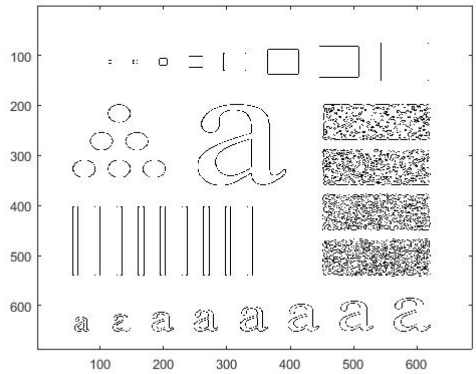
شکل ۴:تصاویر از راست به چپ: نویزگیری شده توسط کرولت‌ها، موجک دابشیز db4، RHFs



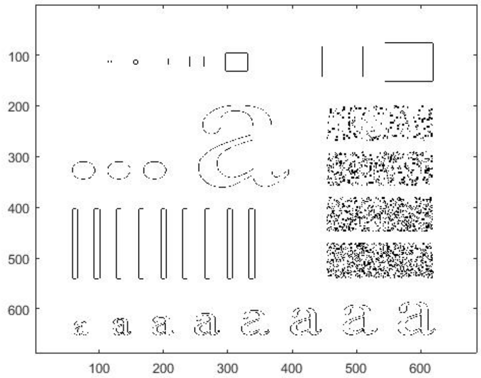
(الف): تصویر اصلی



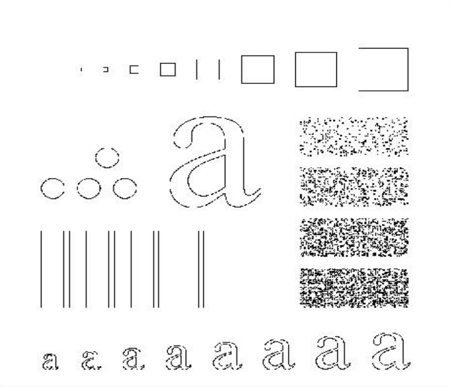
(ب) لبه‌یابی با RHFs



(ج) لبه‌یابی با کنی



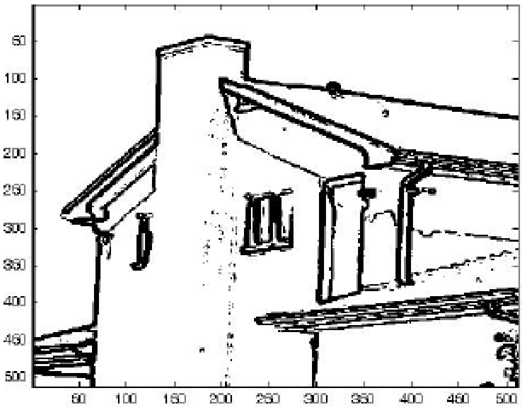
(د) لبه‌یابی با پرویت



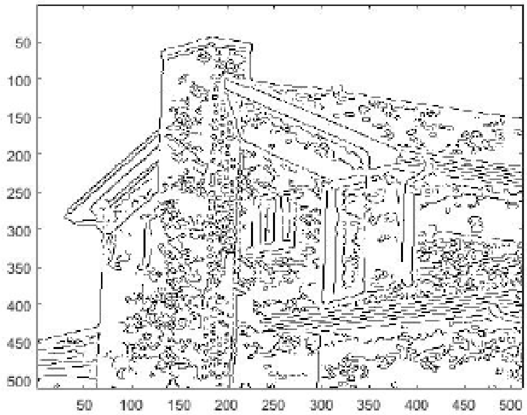
(ه) لبه‌یابی با موجک

شکل ۵: نتایج لبه‌یابی برای تصویر abc

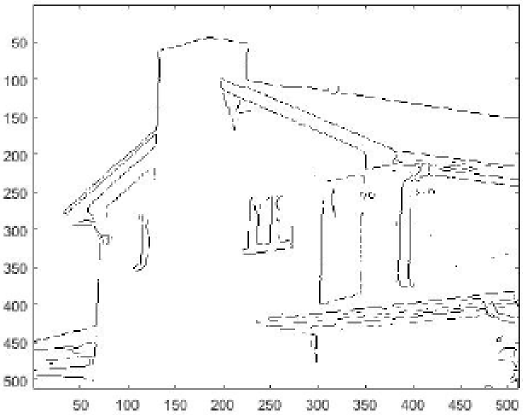
(الف) تصویر اصلی



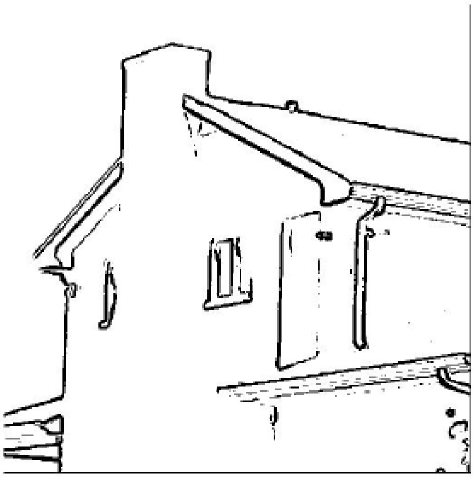
(ب) لبه یابی با RHFs



(ج) لبه یابی با کنی



(د) لبه یابی با پرویت



(ه) لبه یابی با موجک

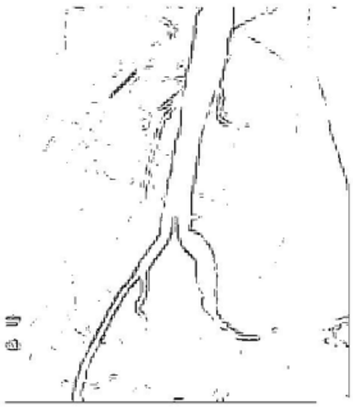
شکل۶: نتایج لبه‌یابی برای تصویر house

(الف): تصویر اصلی

(ب) لبه‌یابی با RHFs

(ج) لبه‌یابی با کنی

(د) لبه‌یابی با پرویت



(ه) لبه‌یابی با موجک

شکل ۷: نتایج لبه‌یابی برای تصویر MRI

پریسا نورس مدرک کارشناسی دبیری ریاضی(سال ۱۳۹۰) و کارشناسی ارشد (سال ۱۳۹۲) ریاضی کاربردی را از دانشگاه شهید مدنی آذربایجان کسب نمود. ایشان هم‌اکنون دانشجوی دکتری در رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش پردازش‌تصویر در دانشگاه شهید مدنی آذربایجان است. زمینه‌های تحقیقاتی ایشان پردازش‌تصاویر پزشکی، بینایی‌ماشین، قطعه‌بندی و لبه‌یابی تصاویر و موجک‌ها است.

ناصر آقازاده مدرک کارشناسی ریاضی کاربردی را در سال ۱۳۷۷از دانشگاه تبریز و مدرک کارشناسی ارشد و دکتری را در رشته ریاضی کاربردی به ترتیب در سال های ۱۳۷۹و ۱۳۸۶از دانشگاه علم و صنعت ایران دریافت نمود. ایشان هم‌اکنون دانشیار گروه ریاضی کاربردی دانشگاه شهید مدنی آذربایجان می‌باشد. زمینه‌های مورد علاقه ایشان موجک، شرلت و روش‌های ریاضی در پردازش تصاویر و خصوصا تصاویر پزشکی می‌باشد. ایشان در سال ۱۳۹۲ آزمایشگاه پردازش تصویر را در دانشگاه شهید مدنی آذربایجان تاسیس و راه‌اندازی نمود. ایشان هم‌اکنون در انستیتوی ریاضیات دانشگاه صنعتی برلین در آلمان مشغول گذراندن فرصت مطالعاتی در زمینه روش‌های ریاضی در پردازش‌تصویر است.